Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2018-2019

Algèbre 1
Exercices – Feuille 1

Exercice 1. Écrire les tables de tous les groupes à 2, 3 et 4 éléments.

Exercice 2.

(1) Soit G un groupe tel que $x^2 = e$ pour tout $x \in G$. Montrer que G est abélien.

(2) Montrer que, si G est fini, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

Exercice 3. On considère sur $\mathbb{R}$ la loi de composition définie par $x * y = x + y - xy$.

(1) Cette loi, est-elle associative, commutative ?

(2) Admet-elle un élément neutre ? Si oui, est-ce que tout élément de $\mathbb{R}$ admet un inverse ?

Exercice 4. Soient $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G définie par

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)\,.$$

(1) Montrer que $(G, *)$ est un groupe non abélien.

(2) Montrer que $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ est un sous-groupe de G.

Exercice 5. On pose

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ et } ad - bc = 1 \right\}.$$

Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ des matrices inversibles à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit G un groupe et soit H un sous-ensemble fini non vide de G stable pour la loi de composition du groupe G.

(1) Montrer que H est un sous-groupe de G.

(2) Trouver un exemple d'un groupe G et d'un sous-ensemble non vide de G stable pour la loi de composition du groupe G qui ne soit pas un sous-groupe de G.

Exercice 7.

(1) Vérifier que le logarithme $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est un isomorphisme de groupes.

(2) Montrer que l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ définie par $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un homomorphisme de groupes. Calculer son image et son noyau.

(3) Même question avec $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ définie par $z = a + ib \mapsto \exp(z) = e^a e^{ib}$.

(4) Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$. Montrer que G avec la multiplication des matrices est un groupe abélien isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.