Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2018-2019

Algèbre 1
Exercices – Feuille 2

Exercice 1. Soient G un groupe abélien et H, K deux sous-groupes de G. Posons $HK = \{ab \mid a \in H \text{ et } b \in K\}$. Montrer que HK est un sous-groupe de G. Montrer que, si $HK = G$ et $H \cap K = \{0\}$, alors $G \simeq H \times K$.

Exercice 2. Soit G un groupe (non nécessairement abélien) et H un sous-groupe de G. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur G définie par

$a\mathcal{R}b$ si $a^{-1}b \in H$

(1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
(2) Soit C une classe d'équivalence et $c \in C$. Montrer que $C = \{ch \mid h \in H\}$.
(3) Supposons que G est fini. Montrer que le cardinal de toute classe de $\mathcal{R}$ est $|H|$. En déduire que $|H|$ divise $|G|$.

Exercice 3. Soit G un groupe abélien fini et H un sous-groupe de G. Montrer que $|G| = |H| \times |G/H|$. A-t-on $G \simeq H \times G/H$?

Exercice 4. Touver le sous-groupe de torsion G_T pour les groupes suivants : $G = \mathbb{Z}^2$, $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Exercice 5.
(1) Soit $n \geq 1$. Construire dans $\mathbb{R}$ un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^n$. En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas de type fini.
(2) Montrer que tout sous-groupe de $\mathbb{Q}$ de type fini est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas de type fini.

Exercice 6. Soit $H = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid 10 \text{ divise } a - b\}$. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$. Montrer que $\mathbb{Z}^2/H \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Exercice 7. Soit H le sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$ engendré par $\{(2, 5), (5, -1), (1, -2)\}$. Déterminer une base de H. Déterminer $\mathbb{Z}^2/H$.

Exercice 8. Soit $e_1 = (2, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0) \in \mathbb{Z}^3$. Montrer qu'il n'existe pas $e_3 \in \mathbb{Z}^3$ tel que $\{e_1, e_2, e_3\}$ soit une base de $\mathbb{Z}^3$.

Exercice 9. Soit $e_1 = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\text{pgcd}(a_1, \ldots, a_n) = 1$. Montrer qu'il existe $e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{Z}^n$ tels que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{Z}^n$.

Exercice 10. Montrer que tout endomorphisme surjectif $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ est un automorphisme.