Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2018-2019

Algèbre 1
Exercices – Feuille 3

Exercice 1. Soit G un groupe. Soient $a, b \in G$ tels que $ab = ba$, et tels que l'ordre de a est égal à n et l'ordre de b est égal à m.

1. Si n et m sont premiers entre eux, montrer que l'ordre de ab est égal à nm.
2. Est-ce que ce résultat est vrai si n et m ne sont pas premiers entre eux ?
3. Montrer qu'il existe un élément dont l'ordre est le $\text{ppcm}(n, m)$.
4. On suppose que G est un groupe abélien fini. Montrer qu'il existe un élément dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G.

Exercice 2. Déterminer la décomposition primaire des groupes suivants.

$$\mathbb{Z}/26\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/54\mathbb{Z}\,,$$
$$\mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/120\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/55\mathbb{Z}\,,$$
$$\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/48\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/54\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/26\mathbb{Z}\,.$$

Exercice 3. Déterminer la décomposition en facteurs invariants des groupes suivants.

$$\mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/90\mathbb{Z}\,,$$
$$\mathbb{Z}/27\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/55\mathbb{Z}\,,$$
$$\mathbb{Z}/63\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/48\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/54\mathbb{Z}\,.$$

Exercice 4. Soit H le sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$ engendré par $(2, 4)$ et $(4, 11)$. Déterminer la décomposition en facteurs invariants de $G = \mathbb{Z}^2/H$.

Exercice 5. Soit H le sous-groupe de $\mathbb{Z}^3$ engendré par $(12, 75, 19)$, $(-6, -41, -3)$ et $(2, 13, 3)$. Déterminer la décomposition en facteurs invariants et la décomposition primaire de $G = \mathbb{Z}^3/H$.

Exercice 6. Combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal 360 ? Faire la liste complète de ces groupes.

Exercice 7. Soit $n \geq 2$. Montrer que pour chaque diviseur d de n, il existe un unique sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'ordre d.

Exercice 8. Montrer que tout groupe abélien fini non cyclique possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.

Exercice 9.

1. Montrer que le groupe des automorphismes de $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$.
2. Trouver le groupe des automorphisme de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.