Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2018-2019

Logique et Algèbre 1
Exercices – Feuille 1

Exercice 1. Soient P, Q, R trois assertions. Montrer que les assertions suivantes sont toujours vraies.

(1) "(non (P ou Q)) $\Leftrightarrow$ ((non P) et (non Q))"

(2) "(P ou (Q et R)) $\Leftrightarrow$ ((P ou Q) et (P ou R))"

(3) "($P \Rightarrow Q$) $\Leftrightarrow$ ((non Q) $\Rightarrow$ (non P))"

Exercice 2. Soient les quatre assertions suivantes

(a) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$

(b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$

(c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0.$

(d) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 > x.$

(1) Déterminer si les assertion a,b,c,d sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

(2) Donner leur négation.

Exercice 3. Nier les assertions suivantes.

(1) Tout triangle rectangle possède un angle droit.

(2) Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.

(3) Pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique la relation $z < x + 1$.

(4) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x - \frac{7}{5}| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \varepsilon)$.

Exercice 4. Soient A, B, C trois assertions. Pour chacune des assertions suivantes écrire sa négation.

(1) A et (non B)

(2) A ou (non B)

(3) A ou (B et C)

(4) A et (B ou C)

(5) $A \Rightarrow$ (non B)

(6) non (A ou B) $\Rightarrow C$

Exercice 5. Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes puis donner leurs négations.

(1) f est majorée.

(2) f est bornée.

(3) f est paire.

(4) f ne s'annule jamais.

(5) f est périodique.

(6) f est croissante.

(7) f n'est pas la fonction nulle.

(8) f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.

(9) f est inférieure à g.

Exercice 6.

(1) (Raisonnement direct) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que, si $a \leq b$, alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.

(2) (Cas par cas) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est divisible par 2 (distinguer les n pairs des n impairs).

(3) (contraposée ou absurde) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que, si $b \neq 0$, alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (on utilisera que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

(4) (Absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

(5) (Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$?

Exercice 7. Écrire la négation et la contraposée de la proposition suivante.

$$(ab \neq 0) \ \Rightarrow ((a \neq 0) \text{ et } (b \neq 0))$$

Exercice 8. Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq 1$ on a $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 9. Fixons un nombre réel $x \geq 1$. Montrer par récurrence sur n que pour tout entier $n \geq 1$ on a $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 10. On considère les deux propositions suivantes.
$P(n)$: "$4^n - 1$ est divisible par 3".
$Q(n)$: "$4^n + 1$ est divisible par 3".

(1) Montrer que les propositions $P(n)$ et $Q(n)$ sont héréditaires.

(2) Montrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

(3) Que peut-on dire de $Q(n)$?