Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2018-2019

Logique et Algèbre 1
Exercices – Feuille 2

Exercice 1. Soit $E = \{a, b, c, d\}$.

(1) En utilisant les symboles $\in$, $\subset$ que peut-on écrire entre (a) a et E, (b) $\emptyset$ et E, (c) $\{a\}$ et E, (d) $\{a, b\}$ et E.

(2) Donner $\mathcal{P}(E)$.

(3) Donner $\{a\} \times E$, $E \times \{a\}$ et $E \times E$.

Exercice 2. Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E. Montrer les égalités suivantes.

(1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(2) $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$.

(3) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

(4) $B \setminus A = (\complement A) \setminus (\complement B)$.

Exercice 3. Soient $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3\}$ et $C = \{1, 4\}$.

(1) Expliciter les produits cartésiens $A \times B$ et $B \times A$.

(2) Expliciter les ensembles $(A \cap C) \times B$ et $(A \times B) \cap (C \times B)$. Que remarquez vous ? Est-ce vrai pour tous les ensembles A, B, C ?

(3) Donner un résultat similaire avec les symboles $\cup$ et $\times$.

Exercice 4. Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E. Montrer les assertions suivantes.

(1) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

(2) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap \complement B = \emptyset$.

(3) $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$.

(4) $\big((A \cap B = A \cap C)$ et $(A \cup B = A \cup C)\big) \Rightarrow B = C$.

Exercice 5.

(1) Soit f l'application de $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même définie par $f(1) = 4$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ et $f(4) = 3$. Déterminer $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{2, 3\})$ et $f^{-1}(\{1\})$.

(2) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}([1, 2])$, $f^{-1}([-2, -1])$ et $f^{-1}([-1, 1])$.

Exercice 6.

(1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = x$. Déterminer $f([0, 1] \times [0, 1])$ et $f^{-1}([-1, 1])$.

(2) Soit $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ l'application définie par $f(x) = \cos(\pi x)$. Déterminer $f(\mathbb{N})$, $f(2\mathbb{N})$ et $f^{-1}(\{\pm 1\})$.

Exercice 7. Soient $f : E \to F$ une application, A, B deux parties de E et C, D deux parties de F. Montrer les assertions suivantes.

(1) $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$.

(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(3) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(4) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(5) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(6) $f^{-1}(\complement_F C) = \complement_E(f^{-1}(C))$.

Exercice 8. Les applications suivantes, sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Justifier votre réponse.

(1) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$.

(2) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n + 1$.

(3) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.

(4) $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$.

Exercice 9. Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par $f(n) = 2n$ et $g(n) = E(\frac{n}{2})$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x pour $x \in \mathbb{R}$. Pour chacune des applications suivantes déterminer si elle est injective, surjective, bijective.

$$f, \; g, \; f \circ g, \; g \circ f.$$