Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2018-2019

Logique et Algèbre 1
Exercices – Feuille 3

Exercice 1. Traduire à l'aide du symbole $\sum$ les sommes suivantes.
(1) $S_1 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.
(2) $S_2 = 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2$.
(3) $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n-1}{n}$.
(4) $S_4 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k+1)^2$.

Exercice 2. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}$.
(1) Montrer que $\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$.
(2) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}$.
(3) Compléter :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{n-k} = \sum_{k=\ldots}^{\ldots} a_k\,, \quad \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} = \sum_{k=\ldots}^{\ldots} a_k\,, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{n+k} = \sum_{k=\ldots}^{\ldots} a_k\,.$$

Exercice 3. Montrer par récurrence sur n les deux égalités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

En déduire la somme $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)$.

Exercice 4. Calculer les sommes doubles suivantes.

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i \times j)\,, \quad \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i + j)\,, \quad \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} j\,.$$

Exercice 5. Montrer l'égalité suivante pour $q \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si } q \neq 1\,, \\ n+1 & \text{si } q = 1\,. \end{cases}$$

Exercice 6. Soient E un ensemble fini et A, B, C trois sous-ensembles de E.
(1) Calculer les cardinaux de $A \setminus B$ et $A \triangle B$ en fonction de ceux de A, B et $A \cap B$. (On rappelle que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$).

(2) Montrer que

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) - \mathrm{Card}(A \cap B) - \mathrm{Card}(A \cap C)\\ -\mathrm{Card}(B \cap C) + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C)\,.\end{aligned}$$

Exercice 7. Soit E un ensemble de cardinal n. Déterminer le nombre de couples (A, B) de sous-ensembles de E tels que $A \subset B$.

Exercice 8.

(1) Montrer que $6! \times 7! = 10!$ (sans calculer $10!$).

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Simplifier les fractions suivantes.

$$\frac{(n+1)!}{n!}, \quad \frac{n!}{(n-2)!}, \quad \frac{(n+1)!}{(n-1)!}\,.$$

(3) Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $(m+1)! - m! = m \times m!$.

Exercice 9.

(1) Quel est le coefficient de x^6 dans $(x+2)^8$.

(2) Quel est le coefficient de x^2y^8 dans $(x-y)^{10}$.

(3) Quel est le coefficient de x^3y^4 dans $(2x-3y)^7$.

Exercice 10. Écrire la formule du binôme de Newton pour $f(x) = (1+x)^n$. Calculer $f'(x)$ pour $n \geq 1$ et $f''(x)$ pour $n \geq 2$. Pour $n \geq 2$, montrer les égalités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n\,, \quad \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n\,2^{n-1}\,, \quad \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)\,2^{n-2}\,.$$

Exercice 11. Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

(1) Combien y-a-t-il de codes possibles ?

(2) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?

(3) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?

(4) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?

Exercice 12. On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes.

(1) Combien y a-t-il de mains différentes ?

(2) Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as ?

(3) Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?

(4) Combien y a-t-il de mains comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame ?