

Licence de mathématiques

troisième année

Cours de Topologie et Espaces Métriques

2026–2027

Luis Paris

1 Préliminaires

1.1 Théorie des ensembles

Définition. Un ensemble X est dit *dénombrable* s'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$. On dit que X est *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable.

Théorème 1.1 (sans démonstration). *Soient X et Y deux ensembles.*

- (1) *Si Y est dénombrable et il existe une injection $f : X \rightarrow Y$, alors X est au plus dénombrable.*
- (2) *Si X est dénombrable et il existe une surjection $f : X \rightarrow Y$, alors Y est au plus dénombrable.*
- (3) *Si A et B sont deux ensembles au plus dénombrables, alors $A \times B$ est au plus dénombrable.*
- (4) *Si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_i est une partie non vide au plus dénombrable de X , alors $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ est au plus dénombrable.*

Corollaire 1.2. *Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.*

Démonstration. Posons $-\mathbb{N} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On a $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$, et $\mathbb{N}$ et $-\mathbb{N}$ sont dénombrables, donc $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^*$ sont dénombrables, donc $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable. On a une application surjective $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$, $(m, n) \mapsto \frac{m}{n}$, et $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable, donc $\mathbb{Q}$ est dénombrable. $\square$

Définition. Soient X et Y deux ensembles, et $f : X \rightarrow Y$ une application.

- (1) Pour tout $A \subseteq X$, l'image de A par f est l'ensemble $f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$.
- (2) Pour tout $B \subseteq Y$, l'image réciproque de B par f est l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

Proposition 1.3 (sans démonstration mais à savoir démontrer). Soient X et Y deux ensembles, et $f : X \rightarrow Y$ une application.

- (1) Pour tous $A_1, A_2 \subseteq X$ on a $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ et $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.
- (2) Pour tous $B_1, B_2 \subseteq Y$ on a $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ et $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Théorème 1.4 (Axiome). Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$. Alors A admet un plus petit élément qui se note $\min(A)$.

Théorème 1.5 (sans démonstration). Soient X un ensemble infini et $A_1, \dots, A_n$ une collection finie de parties de X telle que $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Alors il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que A_i est infini.

Théorème 1.6 (sans démonstration). Soit A un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$. Alors il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $A = \varphi(\mathbb{N}) = \{\varphi(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1.2 Rappels sur les nombres réels

Proposition 1.7 (sans démonstration mais à savoir démontrer). Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $|x + y| \leq |x| + |y|$ et $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Théorème 1.8 (sans démonstration). L'ensemble $(\mathbb{R}, <)$ est archimédien, c'est-à-dire que, pour tout $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

Théorème 1.9 (sans démonstration). Soit x un réel positif ou nul. Alors $x = 0$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, $x \leq \varepsilon$.

Théorème 1.10 (sans démonstration). $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists q \in \mathbb{Q}, |x - q| \leq \varepsilon.$$

Définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

- (1) On dit que x est un *majorant* de A si, pour tout $a \in A$, $a \leq x$.
- (2) On dit que x est la *borne supérieure* de A si x est un majorant de A , et $x \leq y$ pour tout majorant y de A . On note alors $x = \sup(A)$.
- (3) On dit que x est un *minorant* de A si, pour tout $a \in A$, $a \geq x$.
- (4) On dit que x est la *borne inférieure* de A si x est un minorant de A , et $x \geq y$ pour tout minorant y de A . On note alors $x = \inf(A)$.

Définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- (1) On dit que A est *majorée* si A admet un majorant.

- (2) On dit que A est *minorée* si A admet un minorant.
- (3) On dit que A est *bornée* si A est à la fois majorée et minorée.

Théorème 1.11 (Axiome). *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

- (1) *Si A est majorée, alors A admet une borne supérieure.*
- (2) *Si A est minorée, alors A admet une borne inférieure.*

Définition. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x , et on note $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |a_n - x| < \varepsilon.$$

Théorème 1.12 (sans démonstration). *Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ un majorant de A . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (a) $x = \sup(A)$.
- (b) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$, tel que $a \geq x - \varepsilon$.
- (c) Il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x .

Corollaire 1.13. *Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels croissante et majorée. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.*

Démonstration. Posons $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $x = \sup(A)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x_N \in A$ tel que $x \geq x_N \geq x - \varepsilon$. Soit $n \geq N$. Comme la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et x est un majorant de A , on a $x \geq x_n \geq x_N \geq x - \varepsilon$, donc $|x_n - x| \leq \varepsilon$. Ceci montre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x . $\square$

Définition. Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Alors I est un *intervalle* si :

$$\forall x, y \in I, \forall z \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I.$$

Proposition 1.14 (sans démonstration mais à savoir démontrer). *Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est d'une des quatre formes suivantes :*

- (a) $]a, b[$, avec éventuellement $a = -\infty$, $b = +\infty$;
- (b) $[a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$;
- (c) $]a, b]$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$;
- (d) $[a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

On admet que $]a, a[= \emptyset$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

2 Espaces métriques

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition. Soit X un ensemble. Une *distance* sur X est une fonction $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) pour tous $x, y \in X$, on a $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ (*séparation*) ;
- (2) pour tous $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$ (*symétrie*) ;
- (3) pour tous $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*inégalité du triangle*).

On dit alors que (X, d) est un *espace métrique*.

Lemme 2.1. Soit (X, d) un espace métrique. Pour tous $x, y, z \in X$, on a $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.

Démonstration. On a $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, donc $d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$. De même, $d(y, z) - d(x, z) \leq d(x, y)$. On en conclue que $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$. $\square$

Exemple. Soient $X = \mathbb{R}$ et $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ définie par $d(x, y) = |x - y|$. Alors (X, d) est un espace métrique.

Définition. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une *norme* sur X est une fonction $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty[$ vérifiant les conditions suivantes :

- (1) pour tout $x \in X$, on a $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$ (*séparation*) ;
- (2) pour tous $x, y \in X$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*inégalité du triangle*) ;
- (3) pour tous $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (*homogénéité*).

On dit alors que $(X, \|\cdot\|)$ est un *espace normé*.

Exemple. Soient $X = \mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty[$ l'application définie par $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Alors $(X, \|\cdot\|)$ est un espace normé.

Proposition 2.2. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors la fonction $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur X .

Démonstration. Soient $x, y \in X$. Alors

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Soient $x, y \in X$. Alors

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x).$$

Soient $x, y, z \in X$. Alors

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

□

Définition. L'application d définie ci-dessus est la *distance induite* par $\| \cdot \|$.

Exemple. Soit X un ensemble. On définit une fonction $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ en posant

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors d est une distance sur X , appelée *distance discrète* (Démonstration en exercice).

Définition. Soient (X, d) un espace métrique, $x \in X$ et $r \geq 0$. On définit la *boule ouverte* de centre x et de rayon r par

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

On définit la *boule fermée* de centre x et de rayon r par

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

Exemple. Soient $X = \mathbb{R}$ muni de la métrique standard d . Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Alors $B(x, r) =]x - r, x + r[$ et $\overline{B}(x, r) = [x - r, x + r]$.

Définition. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X . On dit que A est *bornée* s'il existe $M \geq 0$ tel que $d(a, b) \leq M$ pour tout $a, b \in A$.

Lemme 2.3. Soient (X, d) un espace métrique, A une partie de X et a_0 un élément de A . Alors A est bornée si et seulement s'il existe $R \geq 0$ tel que $A \subseteq \overline{B}(a_0, R)$.

Démonstration. Supposons que A est bornée. Il existe $M \geq 0$ tel que $d(a, b) \leq M$ pour tout $a, b \in A$. Alors $d(a_0, a) \leq M$ pour tout $a \in A$, donc $A \subseteq \overline{B}(a_0, M)$.

Supposons qu'il existe $R \geq 0$ tel que $A \subseteq \overline{B}(a_0, R)$. Posons $M = 2R$. Soient $a, b \in A$. Comme $a, b \in \overline{B}(a_0, R)$, on a $d(a_0, a) \leq R$ et $d(a_0, b) \leq R$, donc

$$d(a, b) \leq d(a_0, a) + d(a_0, b) \leq 2R = M.$$

Donc A est bornée. □

Définition. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie bornée de X . Alors $\sup\{d(a, b) \mid a, b \in A\}$ s'appelle le *diamètre* de A .

Exemple (A faire en exercice).

- (1) Un ensemble muni de la distance discrète est borné de diamètre 1.
- (2) Soient $X = \mathbb{R}$ muni de la distance standard et $A = \mathbb{N}$. Alors A n'est pas bornée.

- (3) Soient $X = \mathbb{R}$ muni de la distance standard et $A = [0, 1]$. Alors A est bornée de diamètre 1.
- (4) Soient $X = \mathbb{R}$ muni de la distance standard et $A =]0, 1[$. Alors A est bornée de diamètre 1.

Théorème 2.4. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Alors les applications $d_1, d_\infty : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow [0, +\infty[$ définies par

$$\begin{aligned} d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2), \\ d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)) \end{aligned}$$

sont des distances sur $X \times Y$.

Définition. La distance d_∞ s'appelle la *distance produit* de d_X et d_Y .

Démonstration. On démontre que d_1 est une distance et on laisse le cas de d_∞ en exercice. Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. Alors

$$\begin{aligned} d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 0 &\Leftrightarrow d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2) = 0 \Leftrightarrow \\ d_X(x_1, x_2) = 0 \text{ et } d_Y(y_1, y_2) = 0 &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2 \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2). \end{aligned}$$

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. Alors

$$\begin{aligned} d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2) = \\ d_X(x_2, x_1) + d_Y(y_2, y_1) &= d_1((x_2, y_2), (x_1, y_1)). \end{aligned}$$

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in X \times Y$. Alors

$$\begin{aligned} d_1((x_1, y_1), (x_3, y_3)) &= d_X(x_1, x_3) + d_Y(y_1, y_3) \leq \\ d_X(x_1, x_2) + d_X(x_2, x_3) + d_Y(y_1, y_2) + d_Y(y_2, y_3) &= \\ d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + d_1((x_2, y_2), (x_3, y_3)). \end{aligned}$$

□

Définition. Soient X un ensemble, et d_1, d_2 deux distances sur X . On dit que d_1 et d_2 sont *équivalentes* s'il existe des constantes $m, M > 0$ telles que

$$\forall x, y \in X, \quad m d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq M d_1(x, y).$$

Lemme 2.5 Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Alors les distances d_1 et d_∞ sur $X \times Y$ sont équivalentes.

Démonstration. Exercice.

□

2.2 Suites dans un espace métrique

Définition. Une *suite à valeurs dans un ensemble* X est une fonction de $\mathbb{N}$ dans X . On utilisera les notations suivantes pour une suite : $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou $(x_n)_{n=0}^\infty$, ou simplement (x_n) . Pour un entier $n_0 \geq 1$, on appellera aussi *suite* une application de $\mathbb{N}_{\geq n_0}$ dans X . On écrira alors $(x_n)_{n=n_0}^\infty$ ou $(x_n)_{n \geq n_0}$.

Définition. Soient (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X et $x \in X$. On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* x si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

En d'autres termes, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x si $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$. Dans ce cas on dit que x est une *limite* de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Proposition 2.6. Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X . Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers au plus un élément de X .

Démonstration. On suppose qu'il existe $x, x' \in X$ tels que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x et vers x' . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$, alors $d(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. De même, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N'$, alors $d(x_n, x') \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ et $n \geq N'$. Alors

$$d(x, x') \leq d(x_n, x) + d(x_n, x') \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en conclue que $d(x, x') = 0$, donc que $x = x'$. $\square$

Proposition 2.7. Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X . Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, alors $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

Démonstration. Soit $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$, alors $d(x_n, x) \leq 1$. On choisit $R \geq 1$ tel que $d(x, x_n) \leq R$ pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Alors $d(x_n, x) \leq R$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \overline{B}(x, R)$. Par le lemme 2.3, on en conclue que $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné. $\square$

Proposition 2.8. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On munit $X \times Y$ de la distance produit d_∞ . Alors une suite $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $X \times Y$ converge vers $(x, y) \in X \times Y$ si et seulement si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y .

Démonstration. On suppose que $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers (x, y) . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$, alors $d_\infty((x_n, y_n), (x, y)) \leq \varepsilon$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$. Alors

$$d_X(x_n, x) \leq d_\infty((x_n, y_n), (x, y)) \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x . On montre de la même façon que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y .

On suppose que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_X \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N_X$, alors $d_X(x_n, x) \leq \varepsilon$. De même, il existe $N_Y \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N_Y$, alors $d_Y(y_n, y) \leq \varepsilon$. Soit $N = \max(N_X, N_Y)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$. Alors

$$d_\infty((x_n, y_n), (x, y)) = \max(d_X(x_n, x), d_Y(y_n, y)) \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers (x, y) . $\square$

Proposition 2.9. Soient X un ensemble et d_1, d_2 deux distances équivalentes sur X . Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X et $x \in X$. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans (X, d_1) si et seulement si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans (X, d_2) .

Démonstration. Exercice. $\square$

Corollaire 2.10. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $X \times Y$. Alors la suite $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour la distance d_1 si et seulement si elle converge pour la distance d_∞ .

Définition. Soient X un ensemble et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X . Une *suite extraite* de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, également appelée *sous-suite* de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est une suite de la forme $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, où $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers. De manière équivalente, une *suite extraite* est une suite de la forme $(x_{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, où $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

Exemple. La suite $(x_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 2.11. Soit $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\phi(k) \geq k$. En particulier, $\phi(k)$ tend vers $+\infty$.

Démonstration. On démontre que $\phi(k) \geq k$ par récurrence sur k . Supposons que $k = 0$. Alors $\phi(k) = \phi(0) \geq 0 = k$, car $\phi(k) \in \mathbb{N}$. Supposons que $\phi(n) \geq n$. Comme ϕ est strictement croissante,

$$\phi(n+1) \geq \phi(n) + 1 \geq n + 1.$$

On conclue par le principe de récurrence que $\phi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Proposition 2.12. Soit $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{N}$. Il existe une application strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :

- (a) $(n_{\phi(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
- (b) $(n_{\phi(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ est constante.

Démonstration. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $A_k = \{i \in \mathbb{N} \mid n_i = k\}$. Supposons d'abord qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que A_{k_0} est infini. On définit $\phi(i)$ par récurrence sur i comme suit. On pose $\phi(0) = \min(A_{k_0})$. Supposons que $\phi(0), \phi(1), \dots, \phi(i)$ sont définis. Comme A_{k_0} est infini, l'ensemble $A_{k_0} \setminus \{\phi(0), \dots, \phi(i)\}$ est non vide, donc il contient un plus petit

élément que l'on note $\phi(i+1)$. Par construction, l'application $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante. De plus, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\phi(i) \in A_{k_0}$, c'est-à-dire $n_{\phi(i)} = k_0$, donc la suite $(n_{\phi(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ est constante.

On suppose maintenant que A_k est fini pour tout $k \in \mathbb{N}$. On définit $\phi(i)$ par récurrence sur i . On choisit $\ell_0 \in \mathbb{N}$ quelconque, et on pose $\phi(0) = \ell_0$. Supposons que $\phi(i)$ est défini. L'ensemble $B = \bigcup_{k=0}^{n_{\phi(i)}} A_k$ est fini, donc $\mathbb{N} \setminus B$ est infini, donc on peut choisir $j \in \mathbb{N} \setminus B$ tel que $j > \phi(i)$. Posons $\phi(i+1) = j$. Soit $k_{i+1} \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(i+1) \in A_{k_{i+1}}$. Alors $n_{\phi(i+1)} = k_{i+1} > n_{\phi(i)}$, car $\phi(i+1) \in \mathbb{N} \setminus B$. Ceci montre que $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante et $(n_{\phi(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante. $\square$

Théorème 2.13. *Soient (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X , et $x \in X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (a) *Il existe une suite $(x_{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x .*
- (b) *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $x_n \in B(x, \varepsilon)$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une suite $(x_{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x . Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que, si $k \geq K$, alors $d(x, x_{\phi(k)}) < \varepsilon$. On choisit $k \geq K$ tel que $\phi(k) \geq N$ et on pose $n = \phi(k)$. Alors $n \geq N$ et $d(x, x_n) = d(x, x_{\phi(k)}) < \varepsilon$, c'est-à-dire $x_n \in B(x, \varepsilon)$. Ceci montre que la deuxième condition du théorème est vérifiée.

Réciproquement, supposons que la deuxième condition est vérifiée. On construit une fonction strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $d(x_{\phi(k)}, x) < 2^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En appliquant l'hypothèse à $\varepsilon = 1$ et $N = 0$, on a qu'il existe $\phi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_{\phi(0)}, x) < 1$. Supposons que $\phi(0), \dots, \phi(k)$ sont construits. En appliquant l'hypothèse à $N = \phi(k) + 1$ et $\varepsilon = 2^{-k-1}$, on obtient l'existence d'un nombre $n > \phi(k)$ tel que $d(x_n, x) < 2^{-k-1}$. On pose alors $\phi(k+1) = n$. Il est clair que la suite $(x_{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x . $\square$

Définition. Lorsqu'une des conditions équivalentes du théorème 2.13 est satisfaite, on dit que x est une *valeur d'adhérence* de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemple. Considérons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = (-1)^n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $x_{2k} = 1$, donc 1 est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De même, $x_{2k+1} = -1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc -1 est aussi valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 2.14. *Soient (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X , et $x \in X$. On suppose que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .*

- (1) *Toute suite $(x_{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .*
- (2) *x est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Démonstration. Exercice. $\square$

2.3 Espaces vectoriels normés

Définition. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [1, +\infty[$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Par ailleurs, on pose

$$\|x\|_\infty = \max(|x_i| \mid i \in \{1, \dots, n\}).$$

Définition. Soit $p \in]1, +\infty[$. Alors l'exposant conjugué de p est $q = \frac{p}{p-1}$. Remarquer que $q \in]1, +\infty[$ et

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Remarquer aussi que, si q est l'exposant conjugué de p , alors p est l'exposant conjugué de q .

Théorème 2.15 (Inégalité de Young). Soient $p \in]1, +\infty[$ et q son exposant conjugué. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Démonstration. Assertion. Soient $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ et $t \in [0, 1]$. Alors

$$\ln(tx + (1-t)y) \geq t \ln(x) + (1-t) \ln(y).$$

Démonstration de l'assertion. Exercice.

Le théorème est évident si $a = 0$ ou si $b = 0$. On peut donc supposer que $a, b > 0$. En appliquant l'assertion à $x = a^p$, $y = b^q$, $t = \frac{1}{p}$ et $(1-t) = \frac{1}{q}$ on obtient

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) = \ln(ab).$$

En appliquant l'exponentiel des deux côtés et en utilisant que $x \mapsto e^x$ est croissante, on déduit l'inégalité du théorème. $\square$

Théorème 2.16 (Inégalité de Hölder). Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Soient $p \in]1, +\infty[$ et q son exposant conjugué. Alors

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Démonstration. Exercice. $\square$

Théorème 2.17 (Inégalité de Minkowski). Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{K}^n$ et $p \in]1, +\infty[$. Alors $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Démonstration. Soit q l'exposant conjugué de p . Rappelons que $q = \frac{p}{p-1}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a

$$|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}.$$

Soit $z = (|x_1 + y_1|^{p-1}, \dots, |x_n + y_n|^{p-1})$. Alors

$$\|z\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{p-1} = \|x + y\|_p^{p-1}.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder on obtient alors

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i + y_i|^{p-1} \leq \\ &= (\|x\|_p + \|y\|_p) \|z\|_q = (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Si $\|x + y\|_p = 0$, alors il n'y a rien à démontrer. Sinon, on peut diviser des deux côtés de l'inégalité par $\|x + y\|_p^{p-1}$ pour obtenir l'inégalité du théorème. $\square$

Théorème 2.18. Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $p \in [1, +\infty[\cup \{\infty\}$. Alors $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Les cas $p = 1$ et $p = \infty$ sont laissés en exercice. On peut donc supposer que $p \in]1, +\infty[$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Alors

$$\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i|^p = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|x\|_p.$$

Soient $x, y \in \mathbb{K}^n$. Alors, par le théorème 2.17, $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. $\square$

Définition. Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur X . On dit que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont *équivalentes* s'il existe des constantes $m, M > 0$ telles que, pour tout $x \in X$, on a

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1.$$

Lemme 2.19. Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur X . On note d_1 la distance sur X associée à $\|\cdot\|_1$ et d_2 la distance associée à $\|\cdot\|_2$. Alors $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes si et seulement si d_1 et d_2 sont équivalentes.

Démonstration. Exercice. □

Proposition 2.20. Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ et $p, q \in [1, +\infty[\cup \{\infty\}$. Alors $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_q$ sont des normes équivalentes de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Alors

$$(\|x\|_p)^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq n \max(|x_i|^p \mid 1 \leq i \leq n) = n(\|x\|_\infty)^p,$$

donc $\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$. Par ailleurs,

$$(\|x\|_p)^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p \geq \max(|x_i|^p \mid 1 \leq i \leq n) = (\|x\|_\infty)^p,$$

donc $\|x\|_p \geq \|x\|_\infty$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty.$$

Ainsi, chaque $\|\cdot\|_p$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$, donc elles sont toutes équivalentes entre elles. □

2.4 Ouverts et fermés dans un espace métrique

Définition. Soit (X, d) un espace métrique. Une partie A de X est un *ouvert* de X si, pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq A$.

Exemple.

- (1) Soit (X, d) un espace métrique. Alors X et $\emptyset$ sont des parties ouvertes de X .
- (2) Soit $X = \mathbb{R}$ muni de la distance standard. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Alors $]a, b[$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$. Par contre, $[a, b[$ n'est pas ouvert.

Proposition 2.21. Soient (X, d) un espace métrique, $r \geq 0$ et $x_0 \in X$. Alors la boule ouverte $B(x_0, r)$ est une partie ouverte de (X, d) .

Démonstration. Si $r = 0$, alors $B(x_0, r) = \emptyset$, qui est ouvert. On peut donc supposer que $r > 0$. Soit $a \in B(x_0, r)$. Posons $\rho = r - d(x_0, a)$. Comme $d(x_0, a) < r$, on a $\rho > 0$. Soit $z \in B(a, \rho)$. On a

$$d(x_0, z) \leq d(x_0, a) + d(a, z) < d(x_0, a) + \rho = r,$$

donc $z \in B(x_0, r)$. Donc, $B(a, \rho) \subseteq B(x_0, r)$. Ceci montre que $B(x_0, r)$ est une partie ouverte. $\square$

Proposition 2.22. Soient X un ensemble, et d_1, d_2 deux distances sur X . On suppose que d_1 et d_2 sont équivalentes. Soit A une partie de X . Alors A est ouvert dans (X, d_1) si et seulement si A est ouvert dans (X, d_2) .

Démonstration. Par hypothèse, il existe des nombres $m, M > 0$ tels que, pour tous $x, y \in X$, $md_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Md_1(x, y)$. Soit A une partie ouverte de (X, d_1) . Soit $a \in A$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B_{d_1}(a, r) \subseteq A$. Posons $\varepsilon = mr$. Pour tout $x \in X$, on a

$$d_2(a, x) < \varepsilon \Rightarrow md_1(a, x) < \varepsilon = mr \Rightarrow d_1(a, x) < r.$$

Donc la boule $B_{d_2}(a, \varepsilon)$ est contenue dans $B_{d_1}(a, r)$, qui est contenue dans A . Ceci montre que A est ouvert dans (X, d_2) . La démonstration de la réciproque est identique. $\square$

Proposition 2.23. Soient (X, d) un espace métrique, A une partie de X et $x \in X$. Il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x si et seulement si, pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Démonstration. Supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A qui converge vers x . Soit $r > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$, alors $d(a_n, x) < r$. En particulier, $d(a_N, x) < r$, c'est-à-dire $a_N \in B(x, r) \cap A$. Ceci montre que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Supposons que, pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut choisir $a_n \in B(x, 2^{-n}) \cap A$. Alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans A qui converge vers x . $\square$

Théorème 2.24. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X . Alors A est une partie ouverte de X si et seulement si A vérifie la propriété suivante :

(*) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers un élément de A , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in A$ pour tout $n \geq N$.

Démonstration. Supposons que A est ouvert. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X qui converge vers un élément $a \in A$. Comme A est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq A$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $x_n \in B(a, r) \subseteq A$.

Supposons que A n'est pas ouvert. Il existe $a \in A$ tel que, pour tout $r > 0$, $B(a, r) \not\subseteq A$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut choisir $x_n \in B(a, 2^{-n})$ tel que $x_n \notin A$. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans X qui converge vers $a \in A$ et, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $x_n \notin A$. $\square$

Définition. Une partie A d'un espace métrique (X, d) est une *partie fermée* si son complémentaire $X \setminus A$ est ouvert.

Théorème 2.25. Soient (X, d) un espace métrique, $r \geq 0$, et $x_0 \in X$. Alors la boule fermée $\overline{B}(x_0, r)$ est une partie fermée de X .

Démonstration. On pose $U = X \setminus \overline{B}(x_0, r)$. Soit $a \in U$. Posons $\rho = d(x_0, a) - r$. Remarquer que $d(x_0, a) > r$, donc $\rho > 0$. Pour $z \in B(a, \rho)$ on a

$$d(x_0, z) \geq d(x_0, a) - d(a, z) > d(x_0, a) - \rho = r,$$

donc $z \in U$. Donc, $B(a, \rho) \subseteq U$, ce qui démontre que U est ouvert, donc que $\overline{B}(x_0, r)$ est fermé. $\square$

Théorème 2.26. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X . Alors A est fermée si et seulement si elle vérifie la propriété suivante :

(*) Pour toute suite convergente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A , la limite de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à A .

Démonstration. Supposons que A est fermé. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans A qui converge vers un élément $x \in X$. Si on avait $x \in X \setminus A$, alors comme $X \setminus A$ est ouvert, par le théorème 2.23, il existerait $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \in X \setminus A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci est une contradiction, donc $x \in A$.

Supposons que A n'est pas fermé, c'est-à-dire $X \setminus A$ n'est pas ouvert. Il existe $x \in X \setminus A$ tel que, pour tout $r > 0$, $B(x, r) \not\subseteq X \setminus A$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut choisir $a_n \in B(x, 2^{-n})$ tel que $a_n \notin X \setminus A$, c'est-à-dire $a_n \in A$. Alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans A convergente et sa limite n'appartient pas à A . $\square$

Définition. Soit X un ensemble et $\{A_i \mid i \in I\}$ une famille non vide de parties de X . L'union des A_i est

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

L'intersection des A_i est

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Proposition 2.27. Soient X un ensemble et $\{A_i \mid i \in I\}$ une famille non vide de parties de X . Alors

$$X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) \text{ et } X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i).$$

Démonstration. Exercice. $\square$

Théorème 2.28. Soit (X, d) un espace métrique.

- (1) Une union quelconque de parties ouvertes de X est une partie ouverte de X .
- (2) Une intersection finie de parties ouvertes de X est une partie ouverte de X .

(3) Une union finie de parties fermées de X est une partie fermée de X .

(4) Une intersection quelconque de parties fermées de X est une partie fermée de X .

Démonstration. *Partie (1) :* Soient $\{U_i \mid i \in I\}$ une famille non vide d'ouverts de X et $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Soit $x \in U$. Il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Comme U_{i_0} est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq U_{i_0} \subseteq U$. Ceci montre que U est ouvert.

Partie (2) : Soient $\{U_1, \dots, U_n\}$ une famille finie d'ouverts de X et $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$. Soit $x \in U$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subseteq U_i$. Posons $r = \min(r_1, \dots, r_n)$. Alors $B(x, r) \subseteq U_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, donc $B(x, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i = U$. Ceci montre que U est ouvert.

Partie (3) : Soient $\{F_1, \dots, F_n\}$ une famille finie de fermés de X et $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$. Posons $U_i = X \setminus F_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $U = X \setminus F$. On a $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ par la proposition 2.26 et U est ouvert par la partie (2), donc F est fermé.

Partie (4) : Soient $\{F_i \mid i \in I\}$ une famille non vide de fermés de X et $F = \bigcap_{i \in I} F_i$. Posons $U_i = X \setminus F_i$ pour tout $i \in I$ et $U = X \setminus F$. On a $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ par la proposition 2.26 et U est ouvert par la partie (1), donc F est fermé. $\square$

Définition. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X . L'intérieur de A , noté $\mathring{A}$, est l'union de tous les ouverts de X contenus dans A .

Exemple. Soit $X = \mathbb{R}$ muni de la métrique standard. Alors l'intérieur de $]0, 1]$ est $]0, 1[$.

Lemme 2.29. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X .

(1) $\mathring{A}$ est ouvert, et tout ouvert de X contenu dans A est contenu dans $\mathring{A}$.

(2) A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.

Démonstration. Exercice. $\square$

Proposition 2.30. Soient (X, d) un espace métrique, $A \subset X$, et $x \in A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(a) $x \in \mathring{A}$.

(b) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers x , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $x_n \in A$.

(c) Il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq A$.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : Supposons que $x \in \mathring{A}$. Il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subseteq A$. Alors, par le théorème 2.24, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$, alors $x_n \in U \subseteq A$.

(b) $\Rightarrow$ (c) : Supposons que (c) est faux, c'est-à-dire $B(x, r) \not\subseteq A$ pour tout $r > 0$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut choisir $x_n \in B(x, 2^{-n})$ tel que $x_n \notin A$. Alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

converge vers x et aucun élément de la suite est inclus dans A . Ceci montre que (2) est faux.

(c) $\Rightarrow$ (a) : Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq A$. Comme $B(x, r)$ est un ouvert contenu dans A , ceci implique que $x \in \overset{\circ}{A}$. $\square$

Définition. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X . L'adhérence de A , notée $\overline{A}$, est l'intersection de tous les fermés de X contenant A .

Exemple. Soit $X = \mathbb{R}$ muni de la métrique standard. Alors l'adhérence de $]0, 1]$ est $[0, 1]$.

Lemme 2.31. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X .

(1) $\overline{A}$ est fermé, et tout fermé contenant A contient $\overline{A}$.

(2) A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.

Démonstration. Exercice. $\square$

Lemme 2.32. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X . Alors $\overline{X \setminus A} = X \setminus \overset{\circ}{A}$ et $\overline{X \setminus \overset{\circ}{A}} = X \setminus \overline{A}$.

Démonstration. Exercice. $\square$

Proposition 2.33. Soient (X, d) un espace métrique, A une partie de X , et $x \in X$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

(a) $x \in \overline{A}$.

(b) Pour tout ouvert U de X contenant x , on a $U \cap A \neq \emptyset$.

(c) Il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x .

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : Supposons que (b) est faux. Alors il existe un ouvert U de X tel que $x \in U$ et $U \cap A = \emptyset$. Posons $F = X \setminus U$. Alors F est fermé et $A \subset F$, donc $\overline{A} \subset F$. Par ailleurs, on a $x \notin F$, donc $x \notin \overline{A}$, c'est-à-dire (a) est faux.

(b) $\Rightarrow$ (c) : On suppose que, pour tout ouvert U de X contenant x , on a $U \cap A \neq \emptyset$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $B(x, 2^{-n})$ est un ouvert de X qui contient x , donc on peut choisir $a_n \in B(x, 2^{-n}) \cap A$. Il est clair que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans A qui converge vers x .

(c) $\Rightarrow$ (a) : On suppose qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A qui converge vers x . Soit F un fermé de X contenant A . Alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans F qui converge vers x , donc, par le théorème 2.26, $x \in F$. Ceci est vrai pour tout fermé F contenant A , en particulier pour $F = \overline{A}$, donc $x \in \overline{A}$. $\square$

Définition. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X . On dit que A est dense dans X si $\overline{A} = X$.

Exemple. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2.5 Distances topologiquement équivalentes

Définition. Soient X un ensemble et d_1, d_2 deux distances sur X . On dit que d_1 et d_2 sont *topologiquement équivalentes* si, pour toute partie U de X , on a l'équivalence :

$$(U \text{ est un ouvert de } (X, d_1)) \Leftrightarrow (U \text{ est un ouvert de } (X, d_2)).$$

Proposition 2.34. Soient X un ensemble et d_1, d_2 deux distances équivalentes sur X . Alors d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.22. $\square$

Théorème 2.35. Soient X un ensemble et d_1, d_2 deux distances sur X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) Les distances d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes.
- (b) Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tels que $B_{d_1}(x, \varepsilon_1) \subseteq B_{d_2}(x, r)$ et $B_{d_2}(x, \varepsilon_2) \subseteq B_{d_1}(x, r)$.
- (c) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X et tout $x \in X$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans (X, d_1) si et seulement si elle converge vers x dans (X, d_2) .
- (d) Pour toute partie F de X , F est fermée dans (X, d_1) si et seulement si F est fermée dans (X, d_2) .

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : Soit $x \in X$ et $r > 0$. La boule $B_{d_2}(x, r)$ est une partie ouverte de (X, d_2) . Comme d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes, on en déduit que $B_{d_2}(x, r)$ est un ouvert de (X, d_1) , donc, par définition, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $B_{d_1}(x, \varepsilon_1) \subseteq B_{d_2}(x, r)$. On démontre de la même façon qu'il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que $B_{d_2}(x, \varepsilon_2) \subseteq B_{d_1}(x, r)$.

(b) $\Rightarrow$ (c) : Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X et $x \in X$. On suppose que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans (X, d_1) . Soit $\varepsilon > 0$. Par (b), il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $B_{d_1}(x, \varepsilon_1) \subseteq B_{d_2}(x, \varepsilon)$. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$, alors $x_n \in B_{d_1}(x, \varepsilon_1) \subseteq B_{d_2}(x, \varepsilon)$. Ceci montre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans (X, d_2) . On montre de la même façon que, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans (X, d_2) , alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans (X, d_1) .

(c) $\Rightarrow$ (d) : Soit F un fermé de (X, d_1) . Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans F qui converge dans (X, d_2) vers un point $x \in X$. Alors, par hypothèse, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers x dans (X, d_1) , donc $x \in F$, car F est fermé dans (X, d_1) . Ceci montre que F est fermé dans (X, d_2) . La réciproque se démontre de la même façon.

(d) $\Rightarrow$ (a) : Soit U une partie de X . Alors on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} U \text{ ouvert dans } (X, d_1) &\Leftrightarrow X \setminus U \text{ fermé dans } (X, d_1) \Leftrightarrow \\ &X \setminus U \text{ fermé dans } (X, d_2) \Leftrightarrow U \text{ ouvert dans } (X, d_2). \end{aligned}$$

$\square$

2.6 Distance et topologie induite

Définition. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X . La *distance induite* par d sur A , notée d_A , est la restriction de d à $A \times A$. Il est clair que (A, d_A) est alors un espace métrique.

Proposition 2.36. Soient (X, d) un espace métrique, A une partie de X , et U une partie de A . Alors U est un ouvert de (A, d_A) si et seulement s'il existe un ouvert V de (X, d) tel que $U = A \cap V$.

Démonstration. Pour $x \in X$ on note $B_X(x, r)$ la boule dans X centrée en x de rayon r , et pour $x \in A$ on note $B_A(x, r)$ la boule dans A centrée en x de rayon r . Soit U un ouvert de (A, d_A) . Pour tout $x \in U$, il existe $r_x > 0$ tel que $B_A(x, r_x) \subseteq U$. On remarque que $U = \bigcup_{x \in U} B_A(x, r_x)$, et $B_X(x, r_x) \cap A = B_A(x, r_x)$ pour tout $x \in A$. Posons $V = \bigcup_{x \in U} B_X(x, r_x)$. Alors V est un ouvert de X et $V \cap A = U$.

Soient V un ouvert de X et $U = V \cap A$. Soit $x \in U$. Comme V est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_X(x, r) \subseteq V$. Alors $B_A(x, r) = B_X(x, r) \cap A \subseteq V \cap A = U$. Ceci montre que U est un ouvert de A . $\square$

Proposition 2.37. Soient (X, d) un espace métrique, A une partie de X , et F une partie de A . Alors F est un fermé de (A, d_A) si et seulement s'il existe un fermé G de (X, d) tel que $F = A \cap G$.

Démonstration. Exercice. $\square$

3 Fonctions continues

3.1 Fonctions continues et uniformément continues

Définition. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Soit $a \in X$. On dit que f est *continue en a* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

On dit que f est *continue sur X* si elle est continue en tout point $a \in X$.

Définition. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On dit que f est *uniformément continue* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in X, d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Remarque. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Si f est uniformément continue sur X , alors f est continue sur X . La réciproque est fausse.

Définition. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Soit $K > 0$. On dit que f est *lipschitzienne* de rapport K ou *K-lipschitzienne* si :

$$\forall x, x' \in X, \quad d_Y(f(x), f(x')) < K d_X(x, x').$$

On dit que f est *lipschitzienne* s'il existe $K > 0$ tel que f est *K-lipschitzienne*.

Lemme 3.1. Soient X un ensemble et d_1, d_2 deux distances sur X . Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) Les distances d_1 et d_2 sont équivalentes.
- (b) L'application identité, $x \mapsto x$, est lipschitzienne de (X, d_1) dans (X, d_2) et de (X, d_2) dans (X, d_1) .

Démonstration. Exercice. □

Proposition 3.2. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Si f est lipschitzienne, alors f est uniformément continue.

Démonstration. On suppose que f est lipschitzienne de rapport $K > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Soient $x, x' \in X$. Alors

$$d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq K d_X(x, x') < K\delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

□

Proposition 3.3. Soient (X, d) un espace métrique. On munit $X \times X$ de la distance produit d_∞ et $\mathbb{R}$ de la distance standard. Alors $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est 2-lipschitzienne. En particulier, elle est uniformément continue.

Démonstration. Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times X$. Alors

$$\begin{aligned} |d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| &= |(d(x_1, y_1) - d(x_1, y_2)) + (d(x_1, y_2) - d(x_2, y_2))| \leq \\ &|d(x_1, y_1) - d(x_1, y_2)| + |d(x_1, y_2) - d(x_2, y_2)| \leq d(y_1, y_2) + d(x_1, x_2) \leq \\ &2 d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

□

Théorème 3.4. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \rightarrow Y$ une fonction, et $x \in X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) f est continue en x .
- (b) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans X convergeant vers x , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Démonstration. Supposons que f est continue en x . Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X qui converge vers x . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x' \in X$, si $d_X(x, x') < \delta$, alors $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$, alors $d_X(x_n, x) < \delta$, donc $d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$. Ceci montre que la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Réciproquement, supposons que f n'est pas continue en x . Alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x' \in X, d_X(x, x') < \delta \text{ et } d_Y(f(x'), f(x)) \geq \varepsilon.$$

Fixons un tel ε . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut choisir $x_n \in X$ tel que $d_X(x, x_n) < \frac{1}{n}$ et $d_Y(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon$. Alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x et la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(x)$. $\square$

Corollaire 3.5. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et $f, g : X \rightarrow Y$ deux fonctions continues. Supposons qu'il existe une partie dense A de X telle que $f(a) = g(a)$ pour tout $a \in A$. Alors $f = g$.

Démonstration. Soit $x \in X$. Il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A qui converge vers x . Comme f et g sont continues, par le théorème 3.4, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ et $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n)$. Comme $f(a_n) = g(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en conclue que $f(x) = g(x)$. $\square$

Théorème 3.6. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (a) f est continue sur X .
- (b) Pour tout ouvert V de Y , $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X .
- (c) Pour tout fermé G de Y , $f^{-1}(G)$ est un fermé de X .

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : On suppose que f est continue sur X . Soit V un ouvert de Y . Soit $x \in f^{-1}(V)$. On a $f(x) \in V$ et V est ouvert, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_Y(f(x), \varepsilon) \subseteq V$. Comme f est continue, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x' \in X$, si $d_X(x', x) < \delta$, alors $d(f(x'), f(x)) < \varepsilon$. Ceci signifie que, si $x' \in B_X(x, \delta)$, alors $f(x') \in B_Y(f(x), \varepsilon) \subseteq V$, c'est-à-dire $B(x, \delta) \subset f^{-1}(V)$. Donc $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X .

(b) $\Rightarrow$ (a) : Supposons que, pour tout ouvert V de Y , l'ensemble $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X . Soit $x \in X$. Soit $\varepsilon > 0$. L'ensemble $V = B_Y(f(x), \varepsilon)$ est un ouvert de Y , donc $U = f^{-1}(V)$ est un ouvert de X . Comme $x \in U$, il existe $\delta > 0$ tel que $B_X(x, \delta) \subseteq U$. Alors, pour tout $x' \in X$, si $d_X(x', x) < \delta$, alors $d_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon$. Ceci montre que f est continue en tout point x , donc que f est continue.

(b) $\Rightarrow$ (c) : Supposons que, pour tout ouvert V de Y , $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X . Soit G un fermé de Y . Alors $Y \setminus G$ est un ouvert de Y , donc $f^{-1}(Y \setminus G) = X \setminus f^{-1}(G)$ est un ouvert de X , donc $f^{-1}(G)$ est un fermé de X .

(c) $\Rightarrow$ (b) : Supposons que, pour tout fermé G de Y , $f^{-1}(G)$ est un fermé de X . Soit V un ouvert de Y . Alors $Y \setminus V$ est un fermé de Y , donc $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$ est un fermé de X , donc $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X . $\square$

Proposition 3.7. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \rightarrow Y$ une fonction continue, et A une partie de X . Alors $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Démonstration. Soit $x \in \overline{A}$. Il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A qui converge vers x . Comme f est continue, la suite $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dans $f(A)$ converge vers $f(x)$, donc $f(x) \in \overline{f(A)}$. Ceci montre que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. $\square$

Théorème 3.8. Soient (X, d_X) , (Y, d_Y) et (Z, d_Z) trois espaces métriques, et $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux fonctions continues. Alors $g \circ f : X \rightarrow Z$ est continue.

Démonstration. Soit W un ouvert de Z . Comme g est continue, $g^{-1}(W)$ est un ouvert de Y . Alors, comme f est continue, $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$ est un ouvert de X . Ceci montre que $g \circ f : X \rightarrow Z$ est continue. $\square$

Proposition 3.9. Soient (X, d) un espace métrique et $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors $f + g, fg : X \rightarrow \mathbb{R}$ sont également des fonctions continues.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta_1, \delta_2 \in X$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in X, d(x, x_0) < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et} \\ \forall x_0 \in X, d(x, x_0) < \delta_2 &\Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

On pose $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Soit $x \in X$ tel que $d(x, x_0) < \delta$. Alors

$$\begin{aligned} |(f + g)(x) - (f + g)(x_0)| &= |(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))| \leq \\ &|f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre que $f + g : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Soit $x_0 \in X$. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $\varepsilon_1 > 0$ tel que

$$(|f(x_0)| + \varepsilon_1) \varepsilon_1 + |g(x_0)| \varepsilon_1 < \varepsilon.$$

Il existe $\delta_1, \delta_2 \in X$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in X, d(x, x_0) < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_1 \text{ et} \\ \forall x_0 \in X, d(x, x_0) < \delta_2 &\Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Remarquer que, si $d(x, x_0) < \delta_1$, alors $|f(x)| < |f(x_0)| + \varepsilon_1$. On pose $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Soit $x \in X$ tel que $d(x, x_0) < \delta$. Alors

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (fg)(x_0)| &= |(f(x)g(x) - f(x)g(x_0)) + (f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0))| \leq \\ &|f(x)| |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| |f(x) - f(x_0)| < (|f(x_0)| + \varepsilon_1) \varepsilon_1 + |g(x_0)| \varepsilon_1 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre que $fg : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. $\square$

3.2 Fonctions à valeurs dans un produit cartésien

Proposition 3.10. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On munit $X \times Y$ de la métrique produit d_∞ . Alors les projections $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x$, et $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$, $(x, y) \mapsto y$, sont continues. De plus, si V est un ouvert de $X \times Y$, alors $\pi_X(V)$ est un ouvert de X et $\pi_Y(V)$ est un ouvert de Y .

Démonstration. Soit U un ouvert de X . Alors $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$ est un ouvert de $X \times Y$. Ceci montre que π_X est continue. On montre de la même façon que π_Y est continue.

Soit V un ouvert de $X \times Y$. Soit $(x, y) \in V$. Il existe $r > 0$ tel que $B_{X \times Y}((x, y), r) \subseteq V$. Pour $x' \in B_X(x, r)$, on a $d_\infty((x, y), (x', y)) = d_X(x, x') < r$, donc $(x', y) \in B_{X \times Y}((x, y), r) \subseteq V$, donc $x' \in \pi_X(V)$. En d'autres termes, $B_X(\pi_X(x, y), r) = B_X(x, r) \subseteq \pi_X(V)$. Ceci montre que $\pi_X(V)$ est un ouvert de X . On montre de la même façon que $\pi_Y(V)$ est un ouvert de Y . $\square$

Théorème 3.11. Soient (X, d_X) , (Y, d_Y) et (Z, d_Z) trois espaces métriques et $f : X \rightarrow Y \times Z$ une fonction. On pose $f_Y = \pi_Y \circ f : X \rightarrow Y$ et $f_Z = \pi_Z \circ f : X \rightarrow Z$. Alors f est continue si et seulement si f_Y et f_Z sont continues.

Démonstration. Supposons que f est continue. Comme π_Y est continue, on en déduit que $f_Y = \pi_Y \circ f$ est continue. De même, f_Z est continue.

Supposons que f_Y et f_Z sont continues. Soit $x \in X$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f_Y est continue, il existe $\delta_1 > 0$ tel que, si $d_X(x', x) < \delta_1$, alors $d_Y(f_Y(x'), f_Y(x)) < \varepsilon$. De même, comme f_Z est continue, il existe $\delta_2 > 0$ tel que, si $d_X(x', x) < \delta_2$, alors $d_Z(f_Z(x'), f_Z(x)) < \varepsilon$. Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Soit $x' \in X$ tel que $d_X(x', x) < \delta$. Alors :

$$d_\infty(f(x'), f(x)) = d_\infty((f_Y(x'), f_Z(x')), (f_Y(x), f_Z(x))) = \max\{d_Y(f_Y(x'), f_Y(x)), d_Z(f_Z(x'), f_Z(x))\} < \varepsilon.$$

Ceci montre que f est continue. $\square$

3.3 Suites de fonctions

Définition. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans Y . On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : X \rightarrow Y$ si, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Autrement dit :

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Définition. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans Y . On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : X \rightarrow Y$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \forall n \geq N, d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Théorème 3.12. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de X dans Y . Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : X \rightarrow Y$, alors f est continue.

Démonstration. Soit $x \in X$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x' \in X$ et tout $n \geq N$, on a $d_Y(f_n(x'), f(x')) < \frac{\varepsilon}{3}$. Comme f_N est continue, il existe $\delta > 0$ tel que, si $d_X(x', x) < \delta$, alors $d_Y(f_N(x'), f_N(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $x' \in X$ tel que $d_X(x', x) < \delta$. Alors :

$$d_Y(f(x'), f(x)) \leq d_Y(f(x'), f_N(x')) + d_Y(f_N(x'), f_N(x)) + d_Y(f_N(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ceci montre que f est continue. □

3.4 Continuité des applications linéaires dans des espaces vectoriels normés

Dans ce sous-chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 3.13. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ et $f : X \rightarrow Y$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (a) f est continue.
- (b) f est continue en 0.
- (c) Il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in X$, on a $\|f(x)\|_Y \leq M \|x\|_X$.
- (d) f est Lipschitzienne.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b) : Ceci est vrai par définition.

(b) $\Rightarrow$ (c) : On suppose que f est continue en 0. Il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in X$,

$$d_X(x, 0) = \|x - 0\|_X = \|x\|_X \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(0)) = \|f(x) - f(0)\|_Y = \|f(x)\|_Y \leq 1.$$

On pose $M = \frac{1}{\delta}$. Soit $x \in X \setminus \{0\}$. Posons $y = \frac{\delta x}{\|x\|_X}$. On a $\|y\|_X = \delta$, donc

$$\begin{aligned} \|f(y)\|_Y \leq 1 &\Rightarrow \left\| f\left(\frac{\delta x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y \leq 1 \Rightarrow \frac{\delta}{\|x\|_X} \|f(x)\|_Y \leq 1 \Rightarrow \\ &\|f(x)\|_Y \leq \frac{1}{\delta} \|x\|_X = M \|x\|_X. \end{aligned}$$

(c) $\Rightarrow$ (d) : Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in X$, $\|f(x)\|_Y \leq M \|x\|_X$. Soient $x, x' \in X$. Alors :

$$d_Y(f(x), f(x')) = \|f(x) - f(x')\|_Y = \|f(x - x')\|_Y \leq M \|x - x'\|_X = M d_X(x, x').$$

Ceci montre que f est Lipschitzienne.

(d) $\Rightarrow$ (a) : On sait déjà que toute application lipschitzienne est continue. $\square$

Définition. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ et $f : X \rightarrow Y$ une application linéaire continue. Alors la *norme subordonnée* de f est :

$$\|f\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Proposition 3.14. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ et $f : X \rightarrow Y$ une application linéaire continue. Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \quad \|f(x)\|_Y &\leq \|f\| \|x\|_X, \\ \|f\| &= \sup\{\|f(x)\|_Y \mid \|x\|_X \leq 1\} = \sup\{\|f(x)\|_Y \mid \|x\|_X = 1\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $x \in X$. Si $x = 0$, alors $\|f(x)\|_Y = 0 \leq \|f\| \|x\|_X = 0$. Si $x \neq 0$, alors $\frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \|f\|$, donc $\|f(x)\|_Y \leq \|f\| \|x\|_X$. Ceci montre la première inégalité.

Pour $x \in X$ tel que $\|x\|_X \leq 1$ on a

$$\|f(x)\|_Y \leq \|f\| \|x\|_X \leq \|f\|,$$

donc

$$\sup\{\|f(x)\|_Y \mid \|x\|_X \leq 1\} \leq \|f\|.$$

Par ailleurs, il est clair que :

$$\sup\{\|f(x)\|_Y \mid \|x\|_X = 1\} \leq \sup\{\|f(x)\|_Y \mid \|x\|_X \leq 1\}.$$

Si $x \in X \setminus \{0\}$, alors

$$\frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y \leq \sup\{\|f(y)\|_Y \mid \|y\|_X = 1\}.$$

On en déduit que :

$$\|f\| \leq \sup\{\|f(x)\|_Y \mid \|x\|_X = 1\}.$$

$\square$

Notation. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. Alors $\mathcal{L}(X, Y)$ désigne l'ensemble des applications linéaires continues de X dans Y .

Proposition 3.15. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. Alors $\mathcal{L}(X, Y)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. Exercice. $\square$

Théorème 3.16. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. Alors $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(X, Y)$. Il est clair que, si $f = 0$, alors $\|f\| = 0$. Supposons que $\|f\| = 0$. Pour tout $x \in X$, on a $\|f(x)\|_Y \leq \|f\| \|x\|_X = 0$, donc $\|f(x)\|_Y = 0$, donc $f(x) = 0$. Ceci montre que $f = 0$.

Soient $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned} \|\lambda f\| &= \sup\{\|\lambda f(x)\|_Y \mid \|x\|_X = 1\} = \sup\{|\lambda| \|f(x)\|_Y \mid \|x\|_X = 1\} = \\ &= |\lambda| \sup\{\|f(x)\|_Y \mid \|x\|_X = 1\} = |\lambda| \|f\|. \end{aligned}$$

Soient $f, g \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pour tout $x \in X$ tel que $\|x\|_X = 1$ on a

$$\|(f + g)(x)\|_Y = \|f(x) + g(x)\|_Y \leq \|f(x)\|_Y + \|g(x)\|_Y \leq \|f\| + \|g\|,$$

donc

$$\|f + g\| = \sup\{\|(f + g)(x)\|_Y \mid \|x\|_X = 1\} \leq \|f\| + \|g\|.$$

□

Théorème 3.17. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ et $(Z, \|\cdot\|_Z)$ trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $g \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Alors $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$.

Démonstration. Pour tout $x \in X$ tel que $\|x\|_X = 1$ on a

$$\|(g \circ f)(x)\|_Z = \|g(f(x))\|_Z \leq \|g\| \|f(x)\|_Y \leq \|g\| \|f\| \|x\|_X = \|g\| \|f\|,$$

donc $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$.

□

4 Compacité

4.1 Définitions et premières propriétés

Définition. Soient (X, d) un espace métrique et $(U_i)_{i \in I}$ une famille non vide d'ouverts de E . On dit que $(U_i)_{i \in I}$ est un *recouvrement de X par des ouverts* si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$. Si $J \subset I$ et $X = \bigcup_{i \in J} U_i$, alors on dit que $(U_i)_{i \in J}$ est un *sous-recouvrement de X extrait de $(U_i)_{i \in I}$* . On dit qu'un sous-recouvrement $(U_i)_{i \in J}$ est *fini* si J est fini.

Définition. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est *compact* si de tout recouvrement de X par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Proposition 4.1. Soit (X, d) un espace métrique. Alors (X, d) est compact si et seulement si, pour toute famille non vide $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de X vérifiant $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, il existe une partie finie $J \subset I$ tel que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.

Démonstration. Supposons que (X, d) est compact. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E vérifiant $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Pour tout $i \in I$ on pose $U_i = X \setminus F_i$. Alors U_i est ouvert pour tout $i \in I$ et

$$X = X \setminus \emptyset = X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i) = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

En d'autre termes, $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de X par des ouverts. Comme (X, d) est compact, il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $X = \bigcup_{i \in J} U_i$. Alors

$$\emptyset = X \setminus X = X \setminus \left(\bigcup_{i \in J} U_i \right) = \bigcap_{i \in J} (X \setminus U_i) = \bigcap_{i \in J} F_i.$$

On suppose que pour toute famille non vide $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de (X, d) vérifiant $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, il existe une partie finie $J \subset I$ tel que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$. On montre alors que (X, d) est compact de façon similaire. $\square$

Théorème 4.2. *Soit (X, d) un espace métrique. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (a) (X, d) est un espace compact.
- (b) Toute suite de X admet une valeur d'adhérence.

Les deux lemmes suivants sont des préliminaires à la démonstration du théorème 4.2.

Lemme 4.3. *Soit (X, d) un espace métrique (non vide). On suppose que toute suite de X admet une valeur d'adhérence. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $A \subset X$ telle que $X = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon)$.*

Démonstration. On va démontrer la contraposé. On suppose donc qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour toute partie finie $A \subset X$, on a $\bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon_0) \neq X$. On définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ des éléments $x_n \in X$ comme suit. On choisit $x_0 \in X$ quelconque. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont définis. Par hypothèse, on a $\bigcup_{k=0}^n B(x_k, \varepsilon_0) \neq X$, donc on peut choisir $x_{n+1} \in X \setminus (\bigcup_{k=0}^n B(x_k, \varepsilon_0))$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construite vérifie la propriété : pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, si $n \neq m$, alors $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0$. Une telle suite ne peut pas avoir de valeur d'adhérence. $\square$

Lemme 4.4. *Soit (X, d) un espace métrique (non vide). On suppose que toute suite de X admet une valeur d'adhérence. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts. Il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in X$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, r) \subset U_i$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. On suppose que

$$\forall r > 0, \exists x \in X, \forall i \in I, B(x, r) \not\subset U_i,$$

et on cherche une contradiction. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in X, \forall i \in I, B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset U_i.$$

Par hypothèse la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a une valeur d'adhérence, x . Comme $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de X par des ouverts, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Comme U_{i_0} est ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que $B(x, r_0) \subset U_{i_0}$. Comme x est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(x, x_{n_0}) < \frac{r_0}{2}$ et $\frac{1}{n_0} \leq \frac{r_0}{2}$. Si $y \in B(x_{n_0}, \frac{1}{n_0})$, alors

$$d(x, y) \leq d(x, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, y) < \frac{r_0}{2} + \frac{1}{n_0} \leq \frac{r_0}{2} + \frac{r_0}{2} = r_0,$$

donc $B(x_{n_0}, \frac{1}{n_0}) \subset B(x, r_0) \subset U_{i_0}$: contradiction. $\square$

Démonstration du théorème 4.2. (a) $\Rightarrow$ (b) : On suppose que (X, d) est compact. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $K_n = \{x_k \mid k \geq n\}$. On sait par le théorème 2.13 que $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Supposons que $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \emptyset$. Comme (X, d) est compact, il existe une partie finie $J \subset \mathbb{N}$ telle que $\emptyset = \bigcap_{j \in J} K_j$. Soit j_0 le plus grand élément de J . On a $K_{j_0} \subseteq K_j$ pour tout $j \in J$, donc $x_{j_0} \in K_{j_0} \subseteq \bigcap_{j \in J} K_j$: contradiction. On en conclue que $K \neq \emptyset$ donc que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a des valeurs d'adhérence.

(b) $\Rightarrow$ (a) : On suppose que toute suite de X admet une valeur d'adhérence. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts. Par le lemme 4.4, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in X$ il existe $i_x \in I$ tel que $B(x, r) \subseteq U_{i_x}$. Par ailleurs, par le lemme 4.3, il existe une partie finie $A \subseteq X$ telle que $X = \bigcup_{x \in A} B(x, r)$. Posons $J = \{i_x \mid x \in A\}$. Alors J est fini et

$$X \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x, r) \subseteq \bigcup_{x \in A} U_{i_x} = \bigcup_{j \in J} U_j.$$

Ceci montre que (X, d) est compact. $\square$

4.2 Propriétés importantes des espaces compacts

Théorème 4.5. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X . Si (A, d_A) est compact, alors A est une partie fermée de X .

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers un $x \in X$. Comme A est compact, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $a \in A$. Cette sous-suite doit aussi converger vers x , donc $x = a \in A$. Ceci montre que A est fermé. $\square$

Théorème 4.6. Soient (X, d) un espace métrique compact et A une partie fermée de X . Alors (A, d_A) est aussi compact.

Démonstration. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans A . Comme (X, d) est compact, il existe une sous-suite $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $x \in X$. Comme A est fermé, on a $x \in A$. Ceci montre que (A, d_A) est compact. $\square$

Théorème 4.7. Soient (X, d) un espace métrique et K une partie non vide de X . Si (K, d_K) est compact, alors K est bornée.

Démonstration. On choisit $x_0 \in K$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $U_n = B(x_0, n) \cap K$. La collection $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un recouvrement de K par des ouverts, donc il existe une partie finie $J \subseteq \mathbb{N}^*$ telle que $K = \bigcup_{n \in J} U_n$. Soit N le plus grand élément de J . Comme $B(x_0, n) \subseteq B(x_0, N)$ pour tout $n \in J$, on a $K \subseteq \bigcup_{n \in J} B(x_0, n) \subseteq B(x_0, N)$. Ceci montre que K est bornée. $\square$

Proposition 4.8. Soient (X, d) un espace métrique et $(K_i)_{i \in I}$ une collection non vide de parties de X . On suppose que, pour tout $i \in I$, (K_i, d_{K_i}) est compact. Posons $K = \bigcap_{i \in I} K_i$. Alors (K, d_K) est compact.

Démonstration. On choisit $i_0 \in I$. Chaque $K_i \cap K_{i_0}$ est un fermé de K_{i_0} , donc $\bigcap_{i \in I} K_i = \bigcap_{i \in I} (K_i \cap K_{i_0})$ est un fermé de K_{i_0} . On conclue par le théorème 4.6 que (K, d_K) est compact. $\square$

Proposition 4.9. Soient (X, d) un espace métrique et $K_1, \dots, K_n$ des parties de X . On suppose que (K_i, d_{K_i}) est compact pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et on pose $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$. Alors (K, d_K) est compact.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans K . Il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ et une sous-suite $(x_{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ tels que $x_{\phi(k)} \in K_j$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme K_j est compact, il existe une sous-suite $(x_{\phi(\psi(\ell))})_{\ell \in \mathbb{N}}$ de $(x_{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $x \in K_j$. Alors $(x_{\phi(\psi(\ell))})_{\ell \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in K$. Ceci montre que K est compact. $\square$

Théorème 4.10. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une fonction continue. Si (X, d_X) est compact, alors $f(X)$ est une partie compacte de Y .

Démonstration. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $f(X)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on choisit $x_n \in X$ tel que $f(x_n) = y_n$. Comme X est compact, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $x \in X$. Alors, par continuité de f , la sous-suite $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x) \in f(X)$. Ceci montre que $f(X)$ est compact. $\square$

Proposition 4.11. Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. On sait déjà par le théorème 4.7 que f est bornée. Soit M la borne supérieure de f . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $y_n \in f(X)$ tel que $|M - y_n| < \frac{1}{n}$. Remarquer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers M . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on choisit $x_n \in X$ tel que

$f(x_n) = y_n$. Comme X est compact, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers un élément $x \in X$. Par continuité, la suite $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. Cette suite converge aussi vers M , donc $M = f(x) \in f(X)$. On montre de la même façon que f atteint sa borne inférieure. $\square$

Définition. Soit (X, d) un espace métrique compact. On note $C(X, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in C(X, \mathbb{R})$ on pose $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \mid x \in X\}$.

Théorème 4.12. Soit (X, d) un espace métrique compact. Alors $(C(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

Démonstration. Soit $f \in C(X, \mathbb{R})$. Alors

$$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X, |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Soit $f \in C(X, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_\infty &= \max\{|\lambda f(x)| \mid x \in X\} = \max\{|\lambda| |f(x)| \mid x \in X\} = \\ &= |\lambda| \max\{|f(x)| \mid x \in X\} = |\lambda| \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Soient $f, g \in C(X, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in X$ on a

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

donc $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. $\square$

Théorème 4.13. Soient (X, d_X) un espace métrique compact, (Y, d_Y) un espace métrique quelconque, et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors f est uniformément continue.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in X$ il existe $\delta_x > 0$ tel que, si $d_X(x, x') < \delta_x$, alors $d_Y(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2}$. La collection $(B(x, \frac{\delta_x}{2}))_{x \in X}$ est un recouvrement de X par des ouverts. Comme (X, d_X) est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble fini $J \subset X$ tel que $X = \bigcup_{x \in J} B(x, \frac{\delta_x}{2})$. On pose $\delta = \min\{\frac{\delta_x}{2} \mid x \in J\}$. Soient $x_1, x_2 \in X$ tels que $d_X(x_1, x_2) < \delta$. Il existe $x \in J$ tel que $x_1 \in B(x, \frac{\delta_x}{2})$. On a $d_X(x, x_1) < \frac{\delta_x}{2} < \delta_x$, et on a aussi

$$d_X(x, x_2) \leq d_X(x, x_1) + d_X(x_1, x_2) < \frac{\delta_x}{2} + \delta \leq \frac{\delta_x}{2} + \frac{\delta_x}{2} = \delta_x.$$

Il s'en suit que

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq d(f(x), f(x_1)) + d(f(x), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci montre que f est uniformément continue. $\square$

Définition. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une fonction. On dit que f est un *homéomorphisme* si f est bijective et f et f^{-1} sont continues.

Remarque. L'inverse d'une fonction continue bijective entre deux espaces métriques n'est pas nécessairement continue.

Théorème 4.14. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques compacts et $f : X \rightarrow Y$ une fonction continue bijective. Alors f est un homéomorphisme.

Démonstration. On doit montrer que $g = f^{-1} : Y \rightarrow X$ est continue. Soit F un fermé dans X . Alors

$$g^{-1}(F) = \{g^{-1}(x) \mid x \in F\} = \{f(x) \mid x \in F\} = f(F).$$

L'ensemble F est compact par le théorème 4.6, donc $f(F)$ est compact par le théorème 4.10, donc $f(F) = g^{-1}(F)$ est fermé par le théorème 4.5. Ceci montre que g est continue. $\square$

4.3 Produits finis d'espaces compacts

Théorème 4.15. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques compacts. Alors $X \times Y$, muni de la distance produit d_∞ , est aussi compact.

Démonstration. Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $X \times Y$. Comme (X, d_X) est compact, il existe une sous-suite $(x_{\varphi_1(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un point $x \in X$. De même, comme (Y, d_Y) est compact, il existe une sous-suite $(y_{\varphi_1(\varphi_2(\ell))})_{\ell \in \mathbb{N}}$ de $(y_{\varphi_1(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un point $y \in Y$. On pose $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2$. Alors la sous-suite $(x_{\psi(\ell)})_{\ell \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x et la sous-suite $(y_{\psi(\ell)})_{\ell \in \mathbb{N}}$ converge vers y , donc, par la proposition 2.8, la sous-suite $((x_{\psi(\ell)}, y_{\psi(\ell)}))_{\ell \in \mathbb{N}}$ de $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers (x, y) . Ceci montre que $X \times Y$ est compact. $\square$

4.4 Compacité dans les espaces vectoriels de dimension finie

Proposition 4.16. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}$. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite monotone.

Démonstration. Exercice. $\square$

Théorème 4.17. Toute partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$ est compacte.

Démonstration. Soit F une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans F . Par la proposition 4.16, cette suite admet une sous-suite monotone $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Comme F est borné, par le corollaire 1.13, cette sous-suite converge vers un élément $x \in \mathbb{R}$. Comme F est fermé, on a $x \in F$. Ceci montre que F est compact. $\square$

Théorème 4.18. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X = \mathbb{R}^n$ muni de la norme produit $\|\cdot\|_\infty$.

- (1) Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_i \leq b_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.
- (2) Toute partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ est compacte.

Démonstration. *Partie (1) :* On sait par le théorème 4.17 que $[a_i, b_i]$ est compact pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Par le théorème 4.15 on en conclue que $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ est compact.

Partie (2) : Soit F une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$. Il existe $M > 0$ tel que $F \subseteq [-M, M]^n \subseteq \mathbb{R}^n$. On sait par la partie (1) que $[-M, M]^n$ est compact, donc, comme F est un fermé de $[-M, M]^n$, F est compact. $\square$

Théorème 4.19. *Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.*

Démonstration. Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. On va montrer que $\|\cdot\|$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$. Alors toutes les normes sont équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$, donc elles sont toutes équivalentes entre elles.

Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Posons $N = \max\{\|e_i\| \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$. Alors, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| \leq \|x_1 e_1\| + \dots + \|x_n e_n\| = \\ &= |x_1| \|e_1\| + \dots + |x_n| \|e_n\| \leq N(|x_1| + \dots + |x_n|) \leq Nn \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Cela montre qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\|x\| \leq \alpha \|x\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Il reste à démontrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que $\|x\|_\infty \leq \beta \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

On considère l'application $\varphi : (\mathbb{R}^n, d_\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$. Pour tous $x, x' \in \mathbb{R}^n$ on a

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| = |\|x\| - \|x'\|| \leq \|x - x'\| \leq \alpha \|x - x'\|_\infty = \alpha d_\infty(x, x'),$$

donc φ est lipschitzienne, donc φ est continue. On vient de voir au théorème 4.18 que tout fermé borné dans $\mathbb{R}^n$ est compact. En particulier, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. Comme φ est continue, par la proposition 4.11, la restriction de φ à S atteint son minimum, m . En d'autres termes, il existe $x_0 \in S$ tel que $\varphi(x_0) = m$ et $\varphi(x) \geq m$ pour tout $x \in S$. Remarquer que $x_0 \neq 0$, donc $\varphi(x_0) = m = \|x_0\| > 0$. On pose $\beta = \frac{1}{m}$. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On a $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S$, donc

$$\varphi\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \geq m \Rightarrow \left\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\right\| \geq m \Rightarrow \frac{\|x\|}{\|x\|_\infty} \geq m \Rightarrow \frac{1}{m} \|x\| = \beta \|x\| \geq \|x\|_\infty.$$

$\square$

Théorème 4.20. *Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. Soit A une partie de X . Alors A est compact si et seulement si A est fermé et borné dans $(X, \|\cdot\|)$.*

Démonstration. On commence par observer que l'on peut supposer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. En effet, tout espace vectoriel $(X, \|\cdot\|)$ normé complexe de dimension finie est aussi un espace vectoriel réel normé de dimension finie. Soient $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ une base de X et $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'isomorphisme linéaire qui envoie u_i sur e_i pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On définit $\|\cdot\|' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par $\|x\|' = \|\varphi^{-1}(x)\|$. On vérifie facilement que $\|\cdot\|'$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. L'assertion suivante se démontre facilement et est laissée en exercice.

Assertion 1. Soit A une partie de X . Alors on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} A \text{ est bornée dans } (X, \|\cdot\|) &\Leftrightarrow \varphi(A) \text{ est bornée dans } (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|') \\ A \text{ est fermée dans } (X, \|\cdot\|) &\Leftrightarrow \varphi(A) \text{ est fermée dans } (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|') \\ A \text{ est compacte dans } (X, \|\cdot\|) &\Leftrightarrow \varphi(A) \text{ est compacte dans } (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|') \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\|\cdot\|'$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes, on démontre l'assertion suivante qui est aussi laissée en exercice.

Assertion 2. Soit B une partie de $\mathbb{R}^n$. Alors on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} B \text{ est bornée dans } (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|') &\Leftrightarrow B \text{ est bornée dans } (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \\ B \text{ est fermée dans } (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|') &\Leftrightarrow B \text{ est fermée dans } (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \\ B \text{ est compacte dans } (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|') &\Leftrightarrow B \text{ est compacte dans } (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \end{aligned}$$

Soit maintenant A une partie fermée et bornée de $(X, \|\cdot\|)$. Par les assertions 1 et 2 $\varphi(A)$ est fermée et bornée dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Par le théorème 4.18, $\varphi(A)$ est compact dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Par les assertions 1 et 2 on en conclue que A est compact dans $(X, \|\cdot\|)$. $\square$

Théorème 4.21 (Théorème de Riesz – sans démonstration). *Soient $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ et $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Alors X est de dimension finie si et seulement si $\overline{B}(0, 1)$ est compact dans $(X, \|\cdot\|)$.*

5 Complétude

5.1 Suites de Cauchy et espaces complets

Définition. Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X . On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Proposition 5.1. *Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente dans X . Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.*

Démonstration. Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et notons x sa limite. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$, alors $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Soient $n, m \geq N$. Alors

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Remarque. Une suite de Cauchy n'est pas nécessairement convergente.

Définition. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est *complet* si toute suite de Cauchy dans X est convergente.

Proposition 5.2. Soient (X, d) un espace métrique complet et F une partie fermée de X . Alors (F, d_F) est complet.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans F . Comme X est complet, cette suite admet une limite $x \in X$. Comme F est fermé et $x_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a nécessairement $x \in F$. Ceci montre que F est complet. □

Proposition 5.3. Soient (X, d) un espace métrique et F une partie de X . Si (F, d_F) est complet, alors F est fermé dans X .

Démonstration. On suppose que (F, d_F) est complet. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans F qui converge vers un point $x \in X$. Par la proposition 5.1 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme (F, d_F) est complet, cette suite admet une limite $x' \in F$. Par l'unicité de la limite, on conclue que $x = x' \in F$. Ceci montre que F est fermé. □

Proposition 5.4. Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X . On suppose que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et qu'elle admet une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un point $x \in X$. Alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers x .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n, m \geq N$, alors $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Par ailleurs, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que, si $k \geq K$, alors $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. On choisit un entier $k_0 \geq K$ tel que $n_{k_0} \geq N$. Soit $n \geq N$. Alors

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_{k_0}}) + d(x_{n_{k_0}}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Théorème 5.5. Tout espace métrique compact est complet.

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique compact. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans X . Par le théorème 4.2, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un point $x \in X$. Par la proposition 5.4, on en déduit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elle-même converge vers x . Ceci montre que (X, d) est complet. □

Théorème 5.6. Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ de dimension finie. Alors $(X, \|\cdot\|)$ est complet.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n, m \geq N$, alors $d(x_n, x_m) < 1$. On pose $d = \max\{d(x_0, x_i) \mid 1 \leq i \leq N\}$ et $D = d + 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n \leq N$, alors $d(x_0, x_n) \leq d < D$. Si $n > N$, alors

$$d(x_0, x_n) \leq d(x_0, x_N) + d(x_N, x_n) < d + 1 = D.$$

On a donc $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \overline{B}(x_0, D)$. La boule $\overline{B}(x_0, D)$ est fermée et bornée, donc, par le théorème 4.17, elle est compacte. Par le théorème 4.2, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un point $x \in \overline{B}(x_0, D) \subseteq X$, puis, par la proposition 5.4, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x . Ceci montre que $(X, \|\cdot\|)$ est complet. $\square$

Proposition 5.7. Soient (X, d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fermés dans X . On suppose que :

- F_n est non vide et borné pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- $F_{n+1} \subseteq F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- la suite $(\text{diam}(F_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Alors $F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$ est un singleton.

Démonstration. On commence par montrer que F est non vide. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on choisit $x_n \in F_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $\text{diam}(F_n) < \varepsilon$. Soient $n, m \geq N$. Alors, comme $F_n \subseteq F_N$ et $F_m \subseteq F_N$, on a $x_n, x_m \in F_N$, donc $d(x_n, x_m) \leq \text{diam}(F_N) < \varepsilon$. Ceci montre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme (X, d) est complet, cette suite tend vers un point $x \in X$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(x_{n+k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite dans F_n qui tend vers x , donc $x \in F_n$ car F_n est fermé. Finalement $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n = F$.

On montre maintenant que F a au plus un élément. Soient $x, x' \in F$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$, alors $\text{diam}(F_n) < \varepsilon$. Comme $x, x' \in F \subseteq F_N$, il s'en suit que $d(x, x') \leq \text{diam}(F_N) < \varepsilon$. Cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en conclue que $x = x'$. $\square$

5.2 Théorème du point fixe

Définition. Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \rightarrow X$ une fonction. On dit que $z \in X$ est un *point fixe* de f si $f(z) = z$.

Théorème 5.8. Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \rightarrow X$ une fonction k -lipschitzienne de rapport $k < 1$. Alors f admet un unique point fixe, $z \in X$. De plus, pour tout $x \in X$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers z .

Démonstration. On commence par démontrer que f a au plus 1 point fixe. Soient $z, z' \in X$ deux points fixes pour f . Alors

$$d(z, z') = d(f(z), f(z')) \leq k d(z, z'),$$

donc $(1 - k) d(z, z') \leq 0$. Comme $(1 - k) > 0$ et $d(z, z') \geq 0$, il s'en suit que $d(z, z') = 0$, donc que $z = z'$.

Soient $x \in X$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite dans X définie par $x_0 = x$, et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On va démontrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f . Ceci finira la démonstration du théorème.

On commence par démontrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Pour $n > 0$ on a

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq k d(x_n, x_{n-1}).$$

On en déduit par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(f(x), x).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $k < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} k^n$ converge. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{i=N}^{\infty} k^i d(f(x), x) < \varepsilon$. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $N \leq n < m$. Alors

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{m-1} k^i d(f(x), x) \leq \sum_{i=N}^{\infty} k^i d(f(x), x) < \varepsilon.$$

Ceci montre que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Comme (X, d) est complet, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point $z \in X$. Finalement,

$$f(z) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z.$$

□

5.3 Prolongement des applications uniformément continues

Lemme 5.9. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une fonction uniformément continue. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X , alors $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans Y .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, x' \in X$, si $d_X(x, x') < \delta$, alors $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, si $n, m \leq N$, alors $d_X(x_n, x_m) < \delta$. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n, m \geq N$. Alors $d_X(x_n, x_m) < \delta$, donc $d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$. □

Définition. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, A, B deux parties de X telles que $A \subseteq B$, et $f : A \rightarrow Y$, $g : B \rightarrow Y$ deux fonctions. On dit que g *prolonge* f si $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$.

Théorème 5.10. Soient (X, d_X) un espace métrique quelconque, (Y, d_Y) un espace métrique complet, A une partie de X , et $f : A \rightarrow Y$ une fonction uniformément continue. Alors il existe une unique fonction continue $g : \overline{A} \rightarrow Y$ qui prolonge f . De plus, g est uniformément continue.

Démonstration. On commence par construire l'application $g : \overline{A} \rightarrow Y$. Soit $x \in \overline{A}$. il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A qui converge vers x . Par le lemme 5.9, la suite $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans Y . Comme Y est complet, cette suite admet une limite, y . On pose alors $g(x) = y$.

On montre maintenant que $g(x)$ est bien défini, c'est-à-dire que sa définition ne dépend pas du choix de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soient $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une autre suite qui converge vers x et y' la limite de la suite $(f(a'_n))_{n \in \mathbb{N}}$. On veut montrer que $y = y'$. Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite dans A définie par $b_{2n} = a_n$ et $b_{2n+1} = a'_n$. On observe que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dans A qui converge vers x . Soit z la limite de la suite $(f(b_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Comme $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(f(b_n))_{n \in \mathbb{N}}$, on a $y = z$. De même, $y' = z$, donc $y = y'$.

Il est clair que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$. On démontre maintenant que g est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta_1 > 0$ tel que, pour tous $a, a' \in A$, si $d_X(a, a') < \delta_1$, alors $d_Y(f(a), f(a')) < \frac{\varepsilon}{3}$. On pose $\delta = \frac{\delta_1}{3}$. Soient $x, x' \in \overline{A}$ tels que $d_X(x, x') < \delta$. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans A qui converge vers x et $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans A qui converge vers x' . Comme $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x , $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x' , $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $g(x)$ et $(f(a'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $g(x')$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$, alors $d_X(a_n, x) < \delta$, $d_X(a'_n, x') < \delta$, $d_Y(f(a_n), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ et $d_Y(f(a'_n), g(x')) < \frac{\varepsilon}{3}$. Remarquez que

$$d_X(a_N, a'_N) \leq d_X(a_N, x) + d_X(x, x') + d_X(x', a'_N) < \delta + \delta + \delta = 3\delta = \delta_1,$$

donc $d_Y(f(a_N), f(a'_N)) < \frac{\varepsilon}{3}$. D'où :

$$d_Y(g(x), g(x')) \leq d_Y(g(x), f(a_N)) + d_Y(f(a_N), f(a'_N)) + d_Y(f(a'_N), g(x')) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ceci montre que g est uniformément continue.

On montre maintenant que g est unique. Soit $g' : \overline{A} \rightarrow Y$ une autre application continue qui prolonge f . Soit $x \in \overline{A}$. Il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A qui converge vers x . Alors, par continuité,

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = g'(x).$$

□

Théorème 5.11. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. On suppose que $(Y, \|\cdot\|_Y)$ est complet. Soient A un sous-espace vectoriel dense de X et $T : A \rightarrow Y$ une application linéaire continue. Alors T se prolonge de manière unique en une application linéaire continue $\tilde{T} : X \rightarrow Y$. De plus, on a $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Démonstration. Par le théorème 3.13, T est lipschitzienne, donc est uniformément continue. Par le théorème 5.10, il s'en suit que T se prolonge en une unique application uniformément continue $\tilde{T} : X \rightarrow Y$. Montrons que $\tilde{T}$ est linéaire. Pour cela on utilise l'assertion suivante dont la démonstration est laissée en exercice.

Assertion. Soit $(Z, \|\cdot\|_Z)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$. Soient $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites dans Z et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. On suppose que les deux suites $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et on note z et z' leurs limites respectives. Alors la suite $(\lambda c_n + \lambda' c'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est $\lambda z + \lambda' z'$.

Soient $x, x' \in X$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. On choisit des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A qui convergent vers x et x' , respectivement. Alors

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\lambda x + \lambda' x') &= \tilde{T}\left(\lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lambda' \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n\right) = \tilde{T}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n + \lambda' a'_n)\right) = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}(\lambda a_n + \lambda' a'_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T(\lambda a_n + \lambda' a'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda T(a_n) + \lambda' T(a'_n)) = \\ \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} T(a_n) + \lambda' \lim_{n \rightarrow \infty} T(a'_n) &= \lambda \tilde{T}(x) + \lambda' \tilde{T}(x'). \end{aligned}$$

Ceci montre que $\tilde{T}$ est linéaire.

On montre maintenant que $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. On a :

$$\|\tilde{T}\| = \sup\{\|\tilde{T}(x)\|_Y \mid \|x\|_X = 1\} \geq \sup\{\|T(x)\|_Y \mid x \in A \text{ et } \|x\|_X = 1\} = \|T\|.$$

On montre l'autre inégalité. Soit $x \in X$ tel que $\|x\|_X = 1$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans A qui converge vers x . Alors

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}(x)\|_Y &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T(a_n) \right\|_Y = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(a_n)\|_Y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\| \|a_n\|_X = \|T\| \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|_X = \\ \|T\| \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right\|_X &= \|T\| \|x\|_X = \|T\|. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. D'où $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. □

Définition. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une application. On dit que f est une *isométrie* si

$$\forall x, x' \in X, d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x').$$

Théorème 5.12. Soient (X, d_X) un espace métrique, A une partie dense de X , (Y, d_Y) un espace métrique complet, et $f : A \rightarrow Y$ une isométrie. Alors f se prolonge de façon unique en une isométrie $\tilde{f} : X \rightarrow Y$. De plus, si X est complet et $f(A)$ est dense dans Y , alors $\tilde{f}$ est surjective.

Démonstration. L'application f est 1-lipschitzienne, donc est uniformément continue. Par le théorème 5.10, f se prolonge en unique application uniformément continue $\tilde{f} : X \rightarrow Y$.

Montrons que $\tilde{f}$ est une isométrie. Soient $x, x' \in X$. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites dans A qui convergent vers x et x' , respectivement. Alors

$$\begin{aligned} d_Y(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) &= d_Y\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n), \lim_{n \rightarrow \infty} f(a'_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_Y(f(a_n), f(a'_n)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(a_n, a'_n) = d_X\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n\right) = d_X(x, x'). \end{aligned}$$

Ceci montre que $\tilde{f}$ est une isométrie.

On suppose maintenant que X est complet et $f(A)$ est dense dans Y . Soit $y \in Y$. Comme $f(A)$ est dense, il existe une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $f(A)$ qui tend vers y . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on choisit $a_n \in A$ tel que $b_n = f(a_n)$. Comme $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et $d_Y(b_n, b_m) = d_X(a_n, a_m)$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans A . Comme X est complet, cette suite admet une limite $x \in X$. Alors

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = y.$$

Ceci montre que $\tilde{f}$ est surjective. □

5.4 Complété d'un espace métrique

Définition. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On dit que (Y, d_Y) est un *complété* de (X, d_X) si on a les propriétés suivantes.

- (a) $X \subseteq Y$, et d_X est la restriction de d_Y à X .
- (b) (Y, d_Y) est complet.
- (c) X est dense dans Y .

Exemple. $\mathbb{R}$ est le complété de $\mathbb{Q}$.

Théorème 5.13. Soit (X, d_X) un espace métrique.

- (1) L'espace (X, d_X) admet un complété (Y, d_Y) .
- (2) Si (Y, d_Y) et (Z, d_Z) sont deux complétés de (X, d_X) , alors il existe une isométrie bijective $f : Y \rightarrow Z$ dont la restriction à X est l'identité.

Démonstration. On construit un complété (Y, d_Y) de (X, d_X) en plusieurs étapes (assertions 1 à 8). On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy dans X .

Assertion 1. Soient $u = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathcal{C}$. Alors la suite $(d_X(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

Démonstration de l'assertion 1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, si $n, m \geq N$, alors $d_X(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d_X(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n, m \geq N$. On a

$$d_X(x_n, y_n) \leq d_X(x_n, x_m) + d_X(x_m, y_m) + d_X(y_n, y_m) < d_X(x_m, y_m) + 2\frac{\varepsilon}{2} = d_X(x_m, y_m) + \varepsilon,$$

donc $d_X(x_n, y_n) - d_X(x_m, y_m) < \varepsilon$. De même, $d_X(x_m, y_m) - d_X(x_n, y_n) < \varepsilon$, donc $|d_X(x_n, y_n) - d_X(x_m, y_m)| < \varepsilon$. Ceci finit la démonstration de l'assertion 1.

Soient $u = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathcal{C}$. Par l'assertion 1, la suite $(d_X(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc elle admet une limite, car $\mathbb{R}$ est complet. On note $d_{\mathcal{C}}(u, v)$ cette limite.

Assertion 2.

- (1) Soient $u, v \in \mathcal{C}$. Alors $d_{\mathcal{C}}(u, v) = d_{\mathcal{C}}(v, u)$.
- (2) Soient $u, v, w \in \mathcal{C}$. Alors $d_{\mathcal{C}}(u, w) \leq d_{\mathcal{C}}(u, v) + d_{\mathcal{C}}(v, w)$.

Démonstration de l'assertion 2. Soient $u = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $w = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois éléments de $\mathcal{C}$. Alors

$$d_{\mathcal{C}}(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(y_n, x_n) = d_{\mathcal{C}}(v, u).$$

Par ailleurs, comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d_X(x_n, z_n) \leq d_X(x_n, y_n) + d_X(y_n, z_n)$,

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{C}}(u, w) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (d_X(x_n, z_n)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (d_X(x_n, y_n) + d_X(y_n, z_n)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (d_X(x_n, y_n)) + \lim_{n \rightarrow \infty} (d_X(y_n, z_n)) = d_{\mathcal{C}}(u, v) + d_{\mathcal{C}}(v, w). \end{aligned}$$

Ceci finit la démonstration de l'assertion 2.

Soit $\sim$ la relation sur $\mathcal{C}$ définie par

$$u \sim v \Leftrightarrow d_{\mathcal{C}}(u, v) = 0.$$

Assertion 3. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

Démonstration de l'assertion 3. Soient $u = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $w = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois éléments de $\mathcal{C}$. On a $d_X(x_n, x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $d_{\mathcal{C}}(u, u) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(x_n, x_n) =$

0, donc $u \sim u$. Supposons que $u \sim v$. Alors $d_{\mathcal{C}}(v, u) = d_{\mathcal{C}}(u, v) = 0$, donc $v \sim u$. Supposons que $u \sim v$ et $v \sim w$. Alors

$$0 \leq d_{\mathcal{C}}(u, w) \leq d_{\mathcal{C}}(u, v) + d_{\mathcal{C}}(v, w) = 0,$$

donc $d_{\mathcal{C}}(u, w) = 0$, donc $u \sim w$. Ceci finit la démonstration de l'assertion 3.

On pose $Y = \mathcal{C} / \sim$ et, pour $u \in \mathcal{C}$, on note $[u]$ la classe de u dans Y . Soient $\alpha, \beta \in Y$. On choisit $u \in \alpha$ et $v \in \beta$ et on pose $d_Y(\alpha, \beta) = d_{\mathcal{C}}(u, v)$.

Assertion 4. Soient $\alpha, \beta \in Y$. La définition de $d_Y(\alpha, \beta)$ ne dépend pas du choix de $u \in \alpha$ et $v \in \beta$.

Démonstration de l'assertion 4. Soient $u, u' \in \alpha$ et $v, v' \in \beta$. Comme $d_{\mathcal{C}}(u, u') = d_{\mathcal{C}}(v, v') = 0$, on a

$$d_{\mathcal{C}}(u, v) \leq d_{\mathcal{C}}(u, u') + d_{\mathcal{C}}(u', v') + d_{\mathcal{C}}(v, v') = d_{\mathcal{C}}(u', v').$$

De même, $d_{\mathcal{C}}(u', v') \leq d_{\mathcal{C}}(u, v)$, donc $d_{\mathcal{C}}(u, v) = d_{\mathcal{C}}(u', v')$. Ceci finit la démonstration de l'assertion 4.

Assertion 5. (Y, d_Y) est un espace métrique.

Démonstration de l'assertion 5. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in Y$. Soient $u \in \alpha$, $v \in \beta$ et $w \in \gamma$. On a

$$d_Y(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow d_{\mathcal{C}}(u, v) = 0 \Leftrightarrow u \sim v \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

Par ailleurs,

$$d_Y(\alpha, \beta) = d_{\mathcal{C}}(u, v) = d_{\mathcal{C}}(v, u) = d_Y(\beta, \alpha).$$

Finalement,

$$d_Y(\alpha, \gamma) = d_{\mathcal{C}}(u, w) \leq d_{\mathcal{C}}(u, v) + d_{\mathcal{C}}(v, w) = d_Y(\alpha, \beta) + d_Y(\beta, \gamma).$$

Ceci finit la démonstration de l'assertion 5.

Assertion 6. (Y, d_Y) est complet.

Démonstration de l'assertion 6. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans Y . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on choisit $u_n = (x_{k,n})_{k \in \mathbb{N}} \in \alpha_n$. Comme $(x_{k,n})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe $N_n \in \mathbb{N}$ tel que, si $k, l \geq N_n$, alors $d(x_{k,n}, x_{l,n}) < 2^{-n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $y_n = x_{N_n, n}$.

Montrons que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n, m \geq N_1$, alors $d_Y(\alpha_n, \alpha_m) = d_{\mathcal{C}}(u_n, u_m) < \frac{\varepsilon}{4}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq N_1$ et $2^{-N} < \frac{\varepsilon}{4}$. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n, m \geq N$. Comme la suite

$(d_X(x_{k,n}, x_{k,m}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $d_{\mathcal{C}}(u_n, u_m)$ on peut choisir un $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq N_n$, $k \geq N_m$ et $d_X(x_{k,n}, x_{k,m}) \leq d_{\mathcal{C}}(u_n, u_m) + \frac{\varepsilon}{4}$. Alors

$$d_X(y_n, y_m) = d_X(x_{N_n, n}, x_{N_m, m}) \leq d_X(x_{N_n, n}, x_{k, n}) + d_X(x_{k, n}, x_{k, m}) + d_X(x_{k, m}, x_{N_m, m}) \leq 2^{-n} + d_{\mathcal{C}}(u_n, u_m) + \frac{\varepsilon}{4} + 2^{-m} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

On pose $v = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}$ et $\beta = [v] \in Y$. Montrons que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers β dans Y . Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, si $n, m \geq N_1$, alors $d_X(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{3}$. On choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq N_1$ et $2^{-N} < \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$. La suite $(d_X(x_{k,n}, y_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $d_{\mathcal{C}}(u_n, v)$, donc on peut trouver un $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq N_1$, $k \geq N_n$, et $d_{\mathcal{C}}(u_n, v) < d_X(x_{k,n}, y_k) + \frac{\varepsilon}{3}$. Alors

$$d_Y(\alpha_n, \beta) = d_{\mathcal{C}}(u_n, v) < d_X(x_{k,n}, y_k) + \frac{\varepsilon}{3} \leq d_X(x_{k,n}, y_n) + d_X(y_n, y_k) + \frac{\varepsilon}{3} < d_X(x_{k,n}, x_{N_n, n}) + \frac{2\varepsilon}{3} < 2^{-n} + \frac{2\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ceci finit la démonstration de l'assertion 6.

Pour $x \in X$, on note $\mu(x)$ la suite constante en x et $\varphi(x) = [\mu(x)] \in Y$.

Assertion 7. L'application $\varphi : X \rightarrow Y$ est une isométrie.

Démonstration de l'assertion 7. Soient $x, y \in X$. Alors, clairement,

$$d_Y(\varphi(x), \varphi(y)) = d_{\mathcal{C}}(\mu(x), \mu(y)) = d_X(x, y).$$

Ceci finit la démonstration de l'assertion 7.

Assertion 8. $\varphi(X)$ est dense dans Y .

Démonstration de l'assertion 8. Soit $\alpha \in Y$. Soit $u = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \alpha$. Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X et φ est une isométrie, donc $(\varphi(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\varphi(X)$. On va montrer qu'elle converge vers α . Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, si $n, m \geq N$, alors $d_X(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$. La suite $(d_X(x_n, x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $d_{\mathcal{C}}(\mu(x_n), u)$, donc on peut choisir $k \geq N$ tel que $d_{\mathcal{C}}(\mu(x_n), u) < d_X(x_n, x_k) + \frac{\varepsilon}{2}$. Alors

$$d_Y(\varphi(x_n), \alpha) = d_{\mathcal{C}}(\mu(x_n), u) < d_X(x_n, x_k) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci finit la démonstration de l'assertion 8.

Conclusion. (Y, d_Y) est un complété de (X, d_X) .

On suppose maintenant que (Y, d_Y) et (Z, d_Z) sont deux complétés de X . On considère l'application identité $\iota : X \rightarrow Z$, $x \mapsto x$. Par le théorème 5.12, ι se prolonge en une isométrie $f : Y \rightarrow Z$ et cette isométrie est bijective. $\square$

6 Connexité

6.1 Définition et premières propriétés

Définition. Soit (X, d) un espace métrique non vide. On dit que (X, d) est *connexe* si, pour tous ouverts $U, V \subseteq X$ tels que $U \cup V = X$ et $U \cap V = \emptyset$, on a $U = X$ et $V = \emptyset$, ou $U = \emptyset$ et $V = X$.

Proposition 6.1. Soit (X, d) un espace métrique non vide. Alors (X, d) est connexe si et seulement si les seules parties de X qui sont à la fois ouvertes et fermées sont X et $\emptyset$.

Démonstration. Supposons que X est connexe. Soit A une partie de X qui est à la fois ouverte et fermée. Posons $B = X \setminus A$. Comme A est fermée, B est ouverte. A et B sont ouverts, $A \cup B = X$ et $A \cap B = \emptyset$ donc, par définition, $A = X$ ou $A = \emptyset$.

Supposons que les seules parties de X qui sont à la fois ouvertes et fermées sont X et $\emptyset$. Soient U et V deux ouverts de X tels que $U \cup V = X$ et $U \cap V = \emptyset$. Comme V est ouvert et $U = X \setminus V$, U est aussi fermé. Alors $U = X$ (et $V = \emptyset$), ou $U = \emptyset$ (et $V = X$). $\square$

Théorème 6.2. Soit (X, d) un espace métrique non vide. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a) (X, d) est connexe.
- (b) Toute fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ est constante.
- (c) Toute fonction continue $g : X \rightarrow \{0, 1\}$ est constante.

Démonstration. $(a) \Rightarrow (b)$: Supposons que (X, d) est connexe. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ une application continue. On choisit $x_0 \in X$ et on pose $n = f(x_0)$. On a $\{n\} = \mathbb{Z} \cap]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[$, donc $\{n\}$ est ouvert, donc $A = f^{-1}(n)$ est ouvert. Par ailleurs, tout singleton dans un espace métrique est fermé, donc $\{n\}$ est fermé, donc $A = f^{-1}(n)$ est fermé. On a montré que A est fermé et ouvert, donc $A = X$ ou $A = \emptyset$. Mais $A \neq \emptyset$, car $x_0 \in A$, donc $A = X$. Ceci montre que f est l'application constante en n .

$(b) \Rightarrow (c)$: On suppose que toute application continue $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ est constante. Soit $g : X \rightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Comme $\{0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$, g est constante par hypothèse.

$(c) \Rightarrow (a)$: On suppose que toute application continue $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ est constante. Soient U, V deux ouverts de X tels que $U \cup V = X$ et $U \cap V = \emptyset$. On définit $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ par $f(x) = 0$ si $x \in U$ et $f(x) = 1$ si $x \in V$. Les ouverts de $\{0, 1\}$ sont $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ et $\{0, 1\}$. On a

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad f^{-1}(\{0\}) = U, \quad f^{-1}(\{1\}) = V, \quad f^{-1}(\{0, 1\}) = X,$$

donc, si A est un ouvert de $\{0, 1\}$, alors $f^{-1}(A)$ est ouvert. Ceci implique que f est continue. Par hypothèse, f doit être constante. Si f est constante en 0, alors $U = X$ et $V = \emptyset$. Si f est constante en 1, alors $U = \emptyset$ et $V = X$. Donc, (X, d) est connexe. $\square$

Définition. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X . On dit que A est *connexe* si (A, d_A) est connexe, où d_A désigne la restriction de d à A .

Proposition 6.3. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Si X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.

Démonstration. Soit $g : f(X) \rightarrow \{0, 1\}$ une application continue. L'application $g \circ f : X \rightarrow \{0, 1\}$ est continue et X est connexe, donc elle est constante. Cela implique que g aussi est constante. Ceci montre que $f(X)$ est connexe. $\square$

Proposition 6.4. Soient (X, d) un espace métrique, et A, B deux parties de X telles que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Si A est connexe, alors B est connexe.

Démonstration. On suppose que A est connexe. Soit $f : B \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction continue. Comme A est connexe, la fonction f est constante sur A . Il existe donc $\varepsilon \in \{0, 1\}$ tel que $f(a) = \varepsilon$ pour tout $a \in A$. Soit $b \in B$. Comme $b \in \overline{A}$, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A qui converge vers b . Par continuité, la suite $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(b)$. Mais $f(a_n) = \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $f(b) = \varepsilon$. D'où f est constante en ε . Ceci montre que B est connexe. $\square$

Théorème 6.5. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On munit $X \times Y$ de la métrique produit d_∞ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (a) $X \times Y$ est connexe.
- (b) X et Y sont connexes.

Démonstration. $(a) \Rightarrow (b)$: Supposons que $X \times Y$ est connexe. On note $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ la projection sur la première composante. Alors, comme $X = \pi_X(X \times Y)$, par la proposition 6.3, X est connexe. On montre de la même façon que Y est connexe.

$(b) \Rightarrow (a)$: Supposons que X et Y sont connexes. Soit $f : X \times Y \rightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Comme X est connexe, pour tout $y_0 \in Y$, l'application $X \rightarrow \{0, 1\}$, $x \mapsto f(x, y_0)$, est constante. En d'autres termes, pour tous $x_1, x_2 \in X$ et $y_0 \in Y$, on a $f(x_1, y_0) = f(x_2, y_0)$. De même, pour tous $x_0 \in X$ et $y_1, y_2 \in Y$, on a $f(x_0, y_1) = f(x_0, y_2)$. Soient $x_1, x_2 \in X$ et $y_1, y_2 \in Y$. Alors

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_1) = f(x_2, y_2).$$

D'où f est constante. Ceci montre que $X \times Y$ est connexe. $\square$

6.2 Connexité dans $\mathbb{R}$

Définition. Soit I une partie de $\mathbb{R}$. On dit que I est un *intervalle* si :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x, y \in I \text{ et } x < z < y) \Rightarrow z \in I.$$

Théorème 6.6. Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x, y \in f(I)$ et $x < z < y$. On doit montrer que $z \in f(I)$. On choisit $s, t \in I$ tels que $f(s) = x$ et $f(t) = y$. On suppose que $s < t$. Le cas $s > t$ se traite de la même façon. Soit

$$A = \{u \in [s, t] \mid f(v) \leq z \text{ pour tout } v \in [s, u]\}.$$

On a $s \in A$, donc $A \neq \emptyset$, et A est majorée par t . Donc A admet une borne supérieure, $w = \sup(A)$. Il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans A qui converge vers w . La suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(w)$ et $f(u_n) \leq z$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $f(w) \leq z$. On montre que $f(w) = z$ par l'absurde. Supposons que $f(w) < z$. Remarquons que $f(t) = y > z$, donc $w < t$. On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $f(w) < f(w) + \varepsilon < z$. Par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que, si $u \in]w - \delta, w + \delta[$, alors $f(u) \in]f(w) - \varepsilon, f(w) + \varepsilon[$. On peut choisir δ de sorte que $w < w + \delta < t$. Soit $u = w + \frac{\delta}{2}$. Alors, pour tout $v \in [s, u]$, on a $f(v) \leq z$, donc $u \in A$. Ceci contredit le fait que w soit la borne supérieure de A . On en conclut que $f(w) = z$. $\square$

Théorème 6.7. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors A est connexe si et seulement si A est un intervalle.

Démonstration. On démontre que, si A n'est pas un intervalle, alors A n'est pas connexe. On suppose donc que A n'est pas un intervalle. Il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x, y \in A$, $x < z < y$ et $z \notin A$. Posons $U =]-\infty, z[\cap A$ et $V =]z, +\infty[\cap A$. Alors U et V sont des ouverts de A , $U \cup V = A$, $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset$ car $x \in U$, et $V \neq \emptyset$ car $y \in V$. Ceci montre que A n'est pas connexe.

On démontre maintenant que, si A est un intervalle, alors A est connexe. Supposons que A est un intervalle. Soit $f : A \rightarrow \{0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ une application continue. Si f n'est pas constante, il existe $t_0, t_1 \in A$ tels que $f(t_0) = 0$ et $f(t_1) = 1$. Par le théorème 6.6, il existe t entre t_0 et t_1 tel que $f(t) = \frac{1}{2}$: absurde. Donc f est constante. Ceci montre que A est connexe. $\square$

6.3 Composantes connexes

Proposition 6.8. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $(U_i)_{i \in I}$ une collection de parties connexes de X telle que $\bigcap_{i \in I} U_i \neq \emptyset$. Alors $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ est connexe.

Démonstration. Soit $f : U \rightarrow \{0, 1\}$ une application continue. On choisit $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$ et on pose $\varepsilon = f(x)$. Soit $y \in U$. Soit $i \in I$ tel que $y \in U_i$. Comme U_i est connexe et $x, y \in U_i$, on a $f(y) = f(x) = \varepsilon$. Donc f est constante. Ceci montre que U est connexe. $\square$

Définition. Soient (X, d) un espace métrique et $x \in X$. La *composante connexe* de x , notée $C(x)$, est la réunion de toutes les parties connexes de X qui contiennent x .

Proposition 6.9. Soient (X, d) un espace métrique et $x \in X$. Alors $C(x)$ est connexe et fermé.

Démonstration. $C(x)$ est la réunion de toutes les parties connexes qui contiennent x , donc $C(x)$ est connexe par la proposition 6.8. On sait par la proposition 6.4 que $\overline{C(x)}$ est connexe donc, par définition, $\overline{C(x)} \subseteq C(x)$. Ceci implique que $C(x) = \overline{C(x)}$ donc que $C(x)$ est fermé. $\square$

Théorème 6.10. Soient (X, d) un espace métrique et $x, y \in X$. Alors $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ ou $C(x) = C(y)$.

Démonstration. Supposons que $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$. Alors, par la proposition 6.8, $C(x) \cup C(y)$ est connexe. Ceci implique que $(C(x) \cup C(y)) \subseteq C(x)$, car $x \in C(x) \cup C(y)$, donc $C(y) \subseteq C(x)$. On montre de la même façon que $C(x) \subseteq C(y)$, donc $C(x) = C(y)$. $\square$

6.4 Connexité par arcs

Définition. Soient (X, d) un espace métrique et $x, y \in X$. Un *chemin reliant* x à y est une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Définition. Soient (X, d) un espace métrique, $x, y, z \in X$, $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin reliant x à y et $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin reliant y à z . Alors $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ est l'application définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Proposition 6.11. Soient (X, d) un espace métrique, $x, y, z \in X$, $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin reliant x à y et $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin reliant y à z . Alors $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ est continue, donc est un chemin reliant x à z .

Démonstration. Il est clair que γ est continue en tout $t \neq \frac{1}{2}$. Reste à démontrer que γ est continue en $t = \frac{1}{2}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que :

- si $t \in [0, 1]$ et $|1 - t| < \delta$, alors $d(\gamma_1(t), y) < \varepsilon$,
- si $t \in [0, 1]$ et $|t| < \delta$, alors $d(\gamma_2(t), y) < \varepsilon$.

Soit $t \in [0, 1]$ tel que $|t - \frac{1}{2}| < \frac{\delta}{2}$. Si $t \leq \frac{1}{2}$, alors $\gamma(t) = \gamma_1(2t)$, donc $d(\gamma(t), y) = d(\gamma_1(2t), y) < \varepsilon$, car $|2t - 1| < \delta$. Si $t \geq \frac{1}{2}$, alors $\gamma(t) = \gamma_2(2t - 1)$, donc $d(\gamma(t), y) = d(\gamma_2(2t - 1), y) < \varepsilon$, car $|2t - 1| < \delta$. $\square$

Proposition 6.12. Soit (X, d) un espace métrique. Alors la relation “être reliés par un chemin dans X ” est une relation d'équivalence sur X .

Démonstration. On note $\sim$ la relation sur X “être reliés par un chemin dans X ”. Soit $x \in X$. Soit $c_x : [0, 1] \rightarrow X$, $t \mapsto x$, le chemin constant en x . Alors c_x relie x à x , donc $x \sim x$. Soient $x, y \in X$ tels que $x \sim y$. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin reliant x à y . Soit $\gamma' : [0, 1] \rightarrow X$, $t \mapsto \gamma(1 - t)$. Alors γ' est un chemin reliant y à x , donc $y \sim x$. Soient $x, y, z \in X$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$. Soient $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin reliant x à y et $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin reliant y à z . Alors, par la proposition 6.12, $\gamma_1\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ est un chemin reliant x à z , donc $x \sim z$. $\square$

Définition. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est *connexe par arcs* si deux points quelconques de X sont reliés par un chemin.

Théorème 6.13. *Soit (X, d) un espace métrique non vide. Si (X, d) est connexe par arcs, alors (X, d) est connexe.*

Démonstration. On suppose que (X, d) est connexe par arcs. Soit $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ une application continue. On choisit $x_0 \in X$ et on pose $\varepsilon = f(x_0)$. Soit $x \in X$. Comme X est connexe par arcs il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ reliant x_0 à x . L'application $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ est continue et $[0, 1]$ est connexe, donc $f \circ \gamma$ est constante. En particulier, $f(x) = (f \circ \gamma)(1) = (f \circ \gamma)(0) = f(x_0) = \varepsilon$. Donc, f est constante. Ceci montre que X est connexe. $\square$

Proposition 6.14. *Soient (X, d) un espace métrique et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X connexes par arcs telle que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Alors $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe par arcs.*

Démonstration. On fixe $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Soient $x, y \in A$. Soient $i, j \in I$ tels que $x \in A_i$ et $y \in A_j$. Comme $a, x \in A_i$ et A_i est connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow A_i \subseteq A$ reliant x à a . Comme $a, y \in A_j$ et A_j est connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow A_j \subseteq A$ reliant a à y . Alors $\gamma_1\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow A$ est un chemin reliant x à y . Ceci montre que A est connexe par arcs. $\square$

Définition. Soient (X, d) un espace métrique et $x \in X$. La *composante connexe par arcs* de x , notée $CA(x)$, est la réunion de toutes les composantes connexes par arcs de X qui contiennent x .

Proposition 6.15. *Soient (X, d) un espace métrique et $x \in X$. Alors $CA(x)$ est connexe par arcs.*

Démonstration. Ce résultat est une conséquence directe de la proposition 6.14. $\square$

Proposition 6.16. *Soient (X, d) un espace métrique et $x, y \in X$. alors $CA(x) = CA(y)$ ou $CA(x) \cap CA(y) = \emptyset$.*

Démonstration. Supposons que $CA(x) \cap CA(y) \neq \emptyset$. Par la proposition 6.14, $CA(x) \cup CA(y)$ est connexe par arcs, et $x \in CA(x) \cup CA(y)$, donc $(CA(x) \cup CA(y)) \subseteq CA(x)$, donc $CA(y) \subseteq CA(x)$. De même, $CA(x) \subseteq CA(y)$, donc $CA(x) = CA(y)$. $\square$

Proposition 6.17. *Soient*

$$A = \left\{ \left(t, \sin \left(\frac{1}{t} \right) \right) \mid t \in]0, 1] \right\}, \quad I = \{0\} \times [-1, 1], \quad B = I \cup A.$$

Alors A est connexe par arcs, l'adhérence de A est B , et B est connexe mais non connexe par arcs.

Démonstration. Exercice.

□