

Topologie et espaces métriques

Année 2026–2027

Exercices – Feuille 1

Exercice 1.

- (1) Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{N}$. Soit $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin E_n\}$. Démontrer que $E_n \neq E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.
- (2) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ l'application définie par $f(n) = f_n(n) + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $f_n \neq f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 2. Soient X un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une collection non vide de parties de X . Alors l'intersection et la réunion des A_i sont définis par :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid \exists i \in I, x \in A_i\} \text{ et } \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

Soient X, Y deux ensembles et $f : X \rightarrow Y$ une application.

- (1) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une collection non vide de parties de X . Montrer que :

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i) \text{ et } f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i).$$

- (2) Soit $(B_j)_{j \in J}$ une collection non vide de parties de Y . Montrer que :

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j) \text{ et } f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j).$$

Exercice 3. Démontrer que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est d'une des quatre formes suivantes :

- (a) $]a, b[$, avec éventuellement $a = -\infty$, $b = +\infty$;
- (b) $[a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$;
- (c) $]a, b]$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$;
- (d) $[a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^2$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^2$ on pose :

$$d(x, y) = \begin{cases} \|x\| + \|y\| & \text{si } x \text{ et } y \text{ ne sont pas colinéaires,} \\ \|x - y\| & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.} \end{cases}$$

Démontrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$ (la "distance SNCF").

Exercice 5. Démontrer les assertions suivantes.

- (1) Un ensemble muni de la distance discrète est borné de diamètre 1.
- (2) Soient $X = \mathbb{R}$ muni de la distance standard et $A = \mathbb{N}$. Alors A n'est pas bornée.
- (3) Soient $X = \mathbb{R}$ muni de la distance standard et $A = [0, 1]$. Alors A est bornée de diamètre 1.
- (4) Soient $X = \mathbb{R}$ muni de la distance standard et $A =]0, 1[$. Alors A est bornée de diamètre 1.

Exercice 6. Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés. Notons d_X la distance sur X induite par $\|\cdot\|_X$ et d_Y la distance sur Y induite par $\|\cdot\|_Y$. Rappelons que d_1 et d_∞ sont les distances sur $X \times Y$ définies par

$$\begin{aligned} d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2), \\ d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \max(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)). \end{aligned}$$

Trouver des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $X \times Y$ telles que d_1 soit induite par $\|\cdot\|_1$ et d_∞ soit induite par $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 7. Dans cet exercice on munit $\mathbb{R}$ de la métrique standard.

- (1) Démontrer qu'une suite croissante et bornée dans $\mathbb{R}$ est convergente.
- (2) Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes de $\mathbb{R}$ vérifiant $x_n < y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Peut-on avoir égalité ?

Exercice 8. Soient X un ensemble et d_1, d_2 deux distances équivalentes sur X . Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans X et $x \in X$. Démontrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans (X, d_1) si et seulement si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans (X, d_2) .